

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE
CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

FRANCISCO AURELIANO VIDAL

**SEÇÕES CÔNICAS: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO ENSINO MÉDIO
UTILIZANDO O GEOGEBRA**

Produto educacional desenvolvido sob orientação do(a) Prof. Dr. Givaldo Oliveira dos Santos e apresentada à banca examinadora como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática – Área de Concentração “Ensino de Matemática”, pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas.

MACEIÓ
2013

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	3
2	A SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	5
2.1	Sequência didática utilizando o GeoGebra.....	5
2.2	Proposta de ensino com turmas do ensino médio.....	6
2.3	Sugestão de questionário.....	8
2.4	As sessões de ensino.....	11
2.2.1	Sessão 1: Construção da parábola.....	11
2.2.2	Sessão 2: Construção da elipse.....	15
2.2.3	Sessão 3: Construção da hipérbole.....	21
3	CONCLUSÃO.....	26
4	REFERÊNCIAS.....	28

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresentamos o produto educacional que desenvolvemos como parte integrante da nossa dissertação de mestrado na qual propomos uma sequência didática para o ensino das seções cônicas.

Nessa sequência objetivamos auxiliar o professor de matemática do ensino médio, especificamente no ensino das seções cônicas (parábola, elipse e hipérbole), a utilizar uma metodologia diferenciada em que tanto o contexto histórico desse conteúdo quanto as suas aplicações em outras áreas do conhecimento são discutidas como forma de motivar os alunos a despertarem o interesse em aprender este tema.

O software GeoGebra é utilizado como ferramenta para que o aluno possa visualizar as cônicas em diferentes quadros, também perceba a relação existente entre a equação e o gráfico de cada uma delas e visualize dinamicamente cada um de seus elementos, assim, o próprio aluno ao construir a cônica irá perceber por ele mesmo as suas propriedades.

Ao trabalhar desta forma o professor estará em consonância com o artigo 36 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que trata do currículo do ensino médio no qual em seu inciso I cita que deve destacar a educação tecnológica básica além de citar no inciso II que deve ser adotada metodologias de ensino que estimulem a iniciativa dos estudantes.

Esta proposta fundamentou-se nas teorias de Mudança de Quadros de Régine Douady (1987) e de Transposição Didática de Yves Chevallard (1991). Procuramos mostrar essas cônicas como saber a ensinar e em diferentes quadros de acordo com as duas teorias adotadas.

Inicialmente apresentamos o conceito de sequência didática, em seguida expomos a nossa sequência que foi desenvolvida por intermédio do software GeoGebra, fazemos uma explanação da proposta com o detalhamento dos passos que se deve seguir e de seus objetivos e sugestões para os encontros.

Em seguida discutimos o questionário, elaborado com o propósito de obter um diagnóstico inicial da turma para que possamos ter uma ideia de quais atividades os alunos são capazes de realizar.

Finalmente apresentamos as sessões de ensino, uma para cada cônica, iniciando pela parábola, depois a elipse e por fim a hipérbole, onde em cada uma se discute a equação, o gráfico, as propriedades, os elementos principais e uma breve sugestão de atividade a ser desenvolvida pelo aluno.

2 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos a sequência didática para o ensino das seções cônicas, que foi elaborada com o propósito de auxiliar o professor de matemática do ensino médio a promover uma alternativa para a aprendizagem deste tópico da geometria analítica. Propomos que o professor utilize esta sequência discutindo ao longo de sua construção as propriedades e características da cônica para tornar mais eficiente o processo de aprendizado.

Uma seqüência (sic) didática é um esquema experimental de situações problemas desenvolvido por sessões de ensino a partir de um estudo preliminar, caracterizando os objetivos específicos de cada problema, a análise matemática e a análise didática relativas às atividades propostas. A análise matemática destaca as resoluções possíveis, a forma de controle e os resultados esperados, enquanto que a análise didática se preocupa com as variáveis didáticas de situações, pré-requisitos e com a competência. Variáveis didáticas são elementos matemáticos que estão à disposição do professor e, que permitem a análise de situações didáticas durante uma investigação. (HENRIQUES, 2001, p. 61).

Deste modo, esta sequência foi construída para ser aplicada a alunos do terceiro ano do ensino médio tomando o cuidado de fazer as duas análises citadas pelo autor. Acrescentamos que de maneira alguma a nossa pretensão é criar uma proposta inovadora e inusitada em relação ao ensino das seções cônicas, nossa intenção é proporcionar ao professor de matemática uma alternativa diferente para a introdução do ensino deste tema.

2.1 Sequência didática utilizando o GeoGebra

Desenvolvida por intermédio do software GeoGebra, esta sequência mostra de uma forma dinâmica as propriedades de cada uma das três cônicas (parábola, elipse e hipérbole) de modo que se possa visualizar por meio desse software as animações de algumas propriedades que as caracterizam. Pretende-se proporcionar ao professor mais uma ferramenta que pode contribuir com o aprendizado, por parte do aluno, das seções cônicas. Sua aplicação segue a proposta de Henriques (2001) sobre desenvolvimento de uma sequência didática de acordo com a definição a seguir:

Entendemos por desenvolvimento de uma seqüência (sic) didática, a aplicação por sessões, o estudo preliminar realizado pelo pesquisador (professor) com base nos fundamentos que figuram o estudo em questão, caracterizando as atividades a serem desenvolvidas pelos alunos durante o trabalho de campo, no laboratório de informática ou sala de aula. (HENRIQUES, 2001, p. 61).

Essa seqüência considera as seções cônicas como saber a ser ensinado, de acordo com a teoria da Transposição Didática proposta por Chevallard (1991), isto é, o saber contido nos livros didáticos, mas que precisam ainda passar pelo critério do professor o qual deve verificar e adequar esses conteúdos à sala de aula. Em relação à teoria de Mudança de Quadros proposta por Douady (1987), vários quadros são utilizados nessa seqüência dos quais citamos o quadro geométrico, o quadro algébrico, o quadro numérico, o quadro de funções e o quadro da geometria analítica. Essas ideias serviram de referenciais teóricos para esta pesquisa.

2.2 Propostas de ensino

O objetivo principal deste trabalho é proporcionar ao professor de matemática uma seqüência didática para o ensino de cônicas utilizando o software GeoGebra, para que este conteúdo seja abordado de forma mais interativa interpretando o panorama histórico dos problemas, envolvendo cônicas e suas aplicações.

Para se realizar esta proposta é preciso seguir alguns passos:

1. Investigar por meio de aplicação de questionário até que ponto o tema seções cônicas é importante, na visão do aluno, para o desenvolvimento das tecnologias;
2. Diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado pelo aluno em sala de aula;
3. Discutir o contexto histórico das seções cônicas;
4. Observar a aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento;
5. Apresentar aos alunos o software GeoGebra e ensiná-los a usar as ferramentas que serão utilizadas nestas atividades;
6. Fazer uma análise a priori do panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos;

7. Aplicar cada uma das sessões da sequência e realizar as atividades propostas, de acordo com o nível da turma, identificado no diagnóstico;
8. Fazer uma análise de cada seção cônica durante a realização das sessões.

Esta sequência didática tem como propósitos enfatizar uma discussão acerca dos seguintes tópicos:

- O contexto histórico das seções cônicas é necessário e precisa ser apresentado;
- A aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento deve ser discutida, com o propósito de as mesmas serem identificadas em situações reais;
- As propriedades que caracterizam cada cônica, bem como seus elementos, devem ser debatidas ao longo da construção;
- As diferenças entre as elipses, as parábolas e as hipérbolas devem ser enfatizadas;
- As equações de cada uma das três cônicas precisam ser analisadas e suas diferenças abordadas;
- Os gráficos da parábola, da elipse e da hipérbole devem ser analisados em todos os seus aspectos.

Ao final da aplicação das sessões de ensino e das intervenções posteriores do professor da turma complementado com suas colocações e resolução de exercícios, espera-se que o aluno seja capaz de:

- ✓ Caracterizar as seções cônicas;
- ✓ Associar os diferentes tipos de gráficos de cada uma das seções cônicas com suas respectivas equações;
- ✓ Perceber a relação existente entre a equação e o gráfico de uma seção cônica;
- ✓ Determinar os elementos de uma cônica a partir de seu gráfico;
- ✓ Construir o gráfico de uma cônica a partir de seus elementos;
- ✓ Ser capaz de citar exemplos do cotidiano sobre cada cônica.

No ensino médio o aluno que possui essas habilidades mostra que compreendeu o assunto referente às “cônicas” neste nível. Deste modo as etapas de nossa investigação foram elaboradas buscando atingir os objetivos propostos acima.

Organizamos os encontros com os alunos de acordo com o quadro 1:

QUADRO 1: Previsão para 10 encontros

1º encontro	Aplicação de questionário referente ao tema seções cônicas. Leitura, comentários e questionamentos do texto histórico.
2º encontro	Comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes.
3º encontro	Discussão a respeito das aplicações práticas das seções cônicas.
4º encontro	Apresentação do software GeoGebra e familiarização dos alunos com o programa.
5º encontro	Aplicação da sessão de ensino referente à parábola.
6º encontro	Resolução da atividade 1.
7º encontro	Aplicação da sequência didática envolvendo a elipse.
8º encontro	Resolução da atividade 2.
9º encontro	Aplicação da sequência didática envolvendo a parábola.
10º encontro	Resolução da atividade 3.

FONTE: Autor, 2013

Propomos que se trabalhe com alunos do terceiro ano do ensino médio, pois em geral é nesse período que os professores abordam este tema.

2.3 Sugestão de questionário

A seguir uma sugestão de questionário que tem como propósito identificar a familiaridade dos alunos com as seções cônicas, suas expectativas em relação a este estudo e de se fazer uma análise a priori da situação didática. Claro que o professor da turma já deve saber até que ponto seus alunos estão aptos ou não para trabalhar este tema, desta forma sugerimos sua aplicação, mas o mesmo pode fazer algumas adaptações de acordo com o que achar necessário.

A aplicação deste questionário será importante para a obtenção de algumas informações que consideramos úteis para esta proposta: Investigar até que ponto o tema seções cônicas é importante, na visão do aluno, para o desenvolvimento das tecnologias; Diagnosticar a forma como o conteúdo “seções cônicas” é encarado pelo aluno em sala de aula; e Observar a aplicabilidade das cônicas em outras áreas do conhecimento.

No quadro a seguir a sugestão do questionário:

espírito de curiosidade em relação à matemática do dia a dia?
 Sempre Na maioria das vezes Raramente Nunca

15. Você considera que a matemática aprendida sobre as Seções Cônicas tem relação com a sua realidade?
 Sempre Na maioria das vezes Raramente Nunca

16. Qual(is) áreas do conhecimento você considera que pode(m) ser utilizado(s) o conhecimento adquirido no estudo das seções cônicas?
 Física Engenharia Arquitetura
 Astronomia Óptica Outra(s) _____

17. Você acha que os seus conhecimentos anteriores são suficientes para acompanhar o conteúdo de Cônicas?
 Sim Não Não sei

18. Você considera que a organização dada aos conteúdos de Cônicas podem facilitar a sua compreensão?
 Sim Não Não sei

FONTE: Autor, 2012

Este questionário objetiva apenas a obtenção de um diagnóstico inicial a respeito do panorama dos conhecimentos disponíveis dos alunos antes da aplicação da sequência didática. Com o propósito de planejarmos melhor a forma como será abordado os próximos encontros baseados nas conclusões acerca das respostas dadas pelos alunos.

2.4 As sessões de ensino

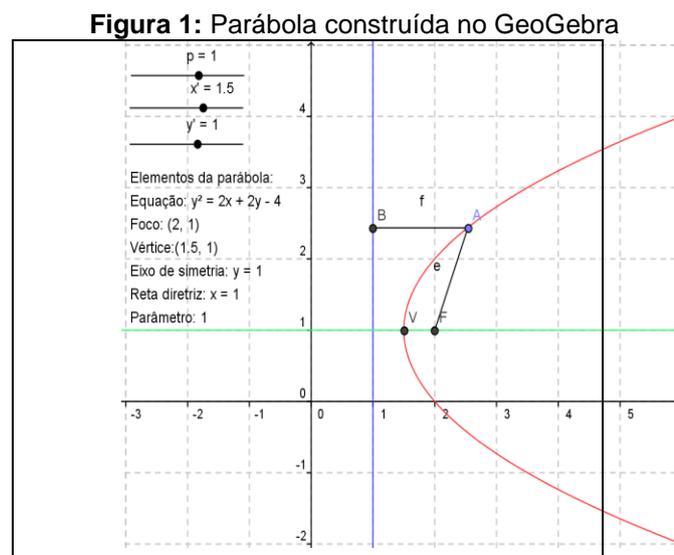
De acordo com o quadro 1 da página 8, antes da aplicação das sessões de ensino no planejamento dos encontros deve ser incluído os comentários dos aportes históricos adquiridos em outras fontes a respeito das seções cônicas, a discussão a respeito das aplicações práticas das seções cônicas e também a apresentação do software GeoGebra e familiarização dos alunos com este programa.

Após estes encontros discute-se cada cônica aplicando as sessões que definiremos abaixo. Vale lembrar que estas sessões são apenas introdutórias a cada cônica, depois de suas aplicações vêm os momentos de intervenção e complementação do professor com suas explicações e aplicação das atividades sugeridas nos livros didáticos para que, de fato, a aprendizagem se concretize.

2.4.1 Sessão 1: Construção de uma Parábola

Nessa atividade buscamos apresentar as propriedades da parábola e seus elementos, ao mesmo tempo em que se percebem as mudanças ocorridas quando variamos os valores numéricos do parâmetro e das coordenadas do vértice, mudanças essas que acontecem desde sua equação até a concavidade da parábola e sua abertura. Pode-se visualizar também a propriedade que caracteriza a parábola em relação ao foco e a reta diretriz quando analisamos um ponto sobre a mesma e sua distância a esses elementos.

Ao longo de sua realização sugerimos que o professor discuta outras questões que achar relevantes relacionadas às características da parábola. A figura 15 foi construída utilizando o GeoGebra 4.2 seguindo os passos sugeridos nesta sessão.



FONTE: Autor, 2013

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Mover



Novo ponto



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto



Reta definida por Dois Pontos

A seguir apresentamos a estrutura dessa sessão de ensino que trata da parábola:

- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a parábola, tais como sua equação algébrica, seu gráfico e seus principais elementos.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as 18 etapas sugeridas a seguir:

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**p**', defina o intervalo de **-5 a 5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**x**' e novamente faça o mesmo mudando o nome do deslizante para '**y**';

4 – Clique no campo de **Entrada Algébrica**, digite **$F=(x'+p/2,y')$** e tecla **enter**, este será o foco da parábola;

5 – Clique no campo de **Entrada Algébrica**, digite **$V=(x',y')$** e tecla **enter**, este será o vértice da parábola;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite **$(y-y')^2=2*p*(x-x')$** esta curva é uma parábola com vértice no ponto **(x', y')** ;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite o **$x=x'-p/2$** , esta será a reta diretriz da parábola;

8 – Selecione a ferramenta **Reta definida por Dois Pontos** , clique no ponto **F** e em seguida no ponto **V**, este é o eixo de simetria da parábola;

9 – Mude a cor da parábola clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolha **Propriedades**, escolha a **cor** de sua preferência ainda em propriedades clique na reta **a** que é a diretriz e escolha outra cor, faça o mesmo com reta **b** que é o eixo de simetria;

10 – Escolha a ferramenta **Inserir Texto** , clique na **Janela de Visualização** e digite '**Elementos da parábola:**' tecele enter e digite '**Equação:**', ainda na janela escolha o objeto **c**, tecele enter e digite '**Foco:**' escolha o objeto **F** tecele enter e digite '**Vértice:**' escolha o objeto **V** tecele enter e digite '**Eixo de simetria:**' escolha o objeto **b**, tecele enter e digite '**Reta diretriz:**', escolha o objeto **a**, tecele enter e digite '**Parâmetro:**', escolha o objeto **p**, clique em **OK**;

11 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na parábola e terá o ponto **A**;

12 – Selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** , clique no ponto **A** e em seguida na reta diretriz da parábola;

13 – Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique na reta diretriz da parábola e em seguida clique na reta perpendicular e terá o ponto **B**, esconda a reta perpendicular clicando na bolinha ao lado da reta **d** na janela algébrica;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **F** e em seguida no ponto **A** e novamente clique em **A** e depois em **B** e teremos os segmentos **AF** e **AB** cujos valores serão **e** e **f**;

15 – Com o botão direito clique no segmento **AF** e selecione **Exibir Rótulo** e aparecerá a letra **f** que representa o segmento, faça o mesmo com o segmento **AB** e aparecerá a letra **e**;

16 – Com o botão direito do mouse clique em **p** na janela algébrica, escolha **Animar** e observe o que acontece com a parábola enquanto os valores de **p** variam. Repita este procedimento para parar a animação;

17 – Com o botão direito do mouse clique no ponto **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **d** e **e**. Repita este procedimento para parar a animação;

18 – Faça o mesmo com **x'** e **y'** e observe o que acontece com cada elemento da parábola.

- **AVALIAÇÃO:** Esperamos que os alunos associem a elipse com sua respectiva equação, também com seu gráfico, entendam quais são seus

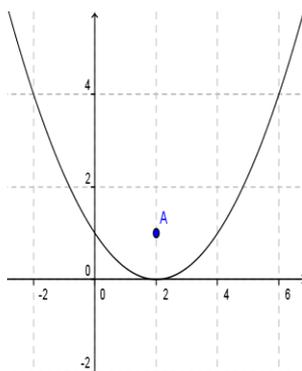
principais elementos, caracterizem suas propriedades e relacionem o seu gráfico com a sua equação.

QUADRO 3: Sugestão de atividade sobre a parábola

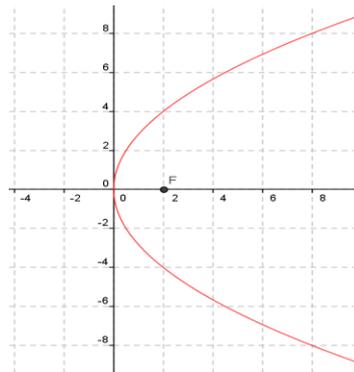
Atividade

- 1- Repita o procedimento utilizando o ponto do passo 4 como $F=(x', y'+ p / 2)$ e a equação do passo 6 como $(x - x')^2=2*p*(y - y')$, que mudanças devemos efetuar na reta do passo 7 para que continue sendo a reta diretriz da parábola? Que diferença você observa entre as duas parábolas construídas?
- 2- Ao efetuar o passo 16 o que acontece com a concavidade da parábola? E quando o valor de p se anula ($p=0$)? E quando p se distancia do zero?
- 3- E no passo 17 o que acontece com os valores de d e e ? Por que isto acontece?
- 4- Quais elementos da parábola se alteram quando realizamos o passo 16? E o passo 17?
- 5- Determine as equações reduzidas das parábolas a seguir:

a)



b)



- 6- Em cada parábola do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Parábola
Equação	
Foco	
Eixo de simetria	
Reta diretriz	
Parâmetro	

- 7- Uma parábola tem foco $F(-1, 8)$ e diretriz dada pela equação $y = 5$. Determinar as coordenadas do vértice e a equação dessa parábola. Construa, no caderno, o gráfico dessa parábola.

- 8- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a parábola, se necessário, circule por diversos ambientes da escola e relate esses objetos.

9- Qual(is) áreas do conhecimento você considera que pode(m) ser utilizado(s) o conhecimento adquirido no estudo das seções cônicas?

- () Física () Engenharia () Arquitetura
 () Astronomia () Óptica () Tecnologias
 () Outra(s) _____

10- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da parábola nessas áreas.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da parábola
Física	
Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	
Óptica	
Tecnologias	
Outras	

11- Relacione a segunda coluna de acordo com a primeira:

- (1) Menaecmus () Em sua análise dos movimentos dos projéteis descobriu que a sua trajetória, desprezando-se a resistência do ar, é uma parábola.
- (2) Apolônio () Propôs aperfeiçoamentos às seções cônicas sob um novo ponto de vista, especialmente em relação ao contexto prático, demonstrou que os planetas movem-se em torno do Sol em trajetórias elípticas com o Sol num dos focos.
- (3) Tâbit ibn Qorra () Descobriu as seções cônicas e utilizou três tipos de cones (tendo, no vértice, ângulo reto, ângulo agudo ou ângulo obtuso) sendo cada cone cortado por um plano perpendicular a um elemento do cone (uma geratriz). Desta forma dependendo do ângulo obteremos a parábola, a elipse ou a hipérbole.
- (4) Johann Kepler () Recebeu dos antigos o nome de “o grande Geômetra”, autor de “As Cônicas” uma obra composta por oito livros na qual aperfeiçoou e aprofundou muito este tema, mostrou que é possível obter de um único cone a elipse, a hipérbole e a parábola apenas variando o ângulo de inclinação do plano de secção, também substituiu o cone de uma só folha por um cone de duas folhas e essa mudança fez da hipérbole a curva de dois ramos que conhecemos hoje, deu as designações elipse, parábola e hipérbole usadas até hoje para essas curvas devido as suas propriedades.
- (5) Galileu Galilei () Sua obra foi decisiva para a manutenção das obras de Apolônio sobre seções cônicas no sentido de proporcionar aos seus sucessores o mais completo material sobre o tema. De

importância especial são suas traduções dos Livros V, VI e VII das *Secções cônicas* de Apolônio, pois somente através delas esses Livros se preservaram. Ele escreveu também sobre astronomia, cônicas, álgebra elementar, quadrados mágicos e números amigáveis.

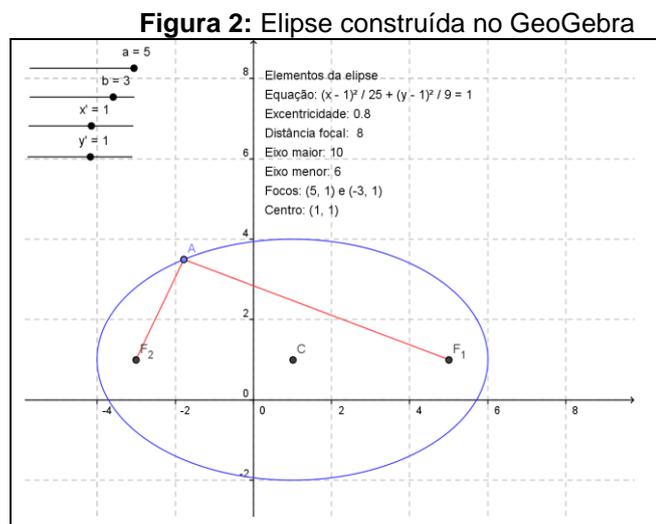
12- Cite outros nomes históricos relacionados às seções cônicas.

FONTE: Autor, 2013

Ao final dessa sessão o professor da turma poderá complementar com suas explicações e resolver exercícios para uma melhor compreensão por parte do aluno a respeito da parábola.

4.4.2 Sessão 2: Construção de uma Elipse

Nesta sessão, apresentamos algumas das propriedades da elipse, seus elementos principais e buscamos mostrar como a sua equação varia quando modificamos alguns de seus elementos. Discutimos também a propriedade da distância de um ponto aos focos que caracteriza a elipse. Ao construir a elipse no GeoGebra propomos que o professor ressalte outras questões que achar pertinente enquanto realiza esta atividade com os alunos. Apresentamos na figura 16 a construção da elipse utilizando o GeoGebra 4.2 que seguiu as etapas sugeridas.



FONTE: Autor, 2013

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Mover



Novo ponto



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto



Mediatriz

Esta sessão tem a seguinte estrutura:

- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a elipse, tais como sua equação algébrica, seu gráfico, seus principais elementos, suas propriedades e a relação entre o seu gráfico e sua equação.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as 23 etapas sugeridas abaixo:

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**a**', defina o intervalo de **-5** a **5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**b**', faça o mesmo para '**x**' e '**y**';

4 – Adéque a janela a uma melhor visualização utilizando a ferramenta **Mover** , faça variar os valores de **a** para 5 e de **b** para 3 e com a ferramenta **Mover Janela de Visualização** , depois clique na área gráfica com o botão direito e escolha **Visualização Padrão**;

5 – No campo de **Entrada Algébrica** digite **$c = \sqrt{a^2 - b^2}$** tecele **Enter**;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** digite o seguinte código: $(x-x')^2/a^2+(y-y')^2/b^2=1$, tecla **Enter**, mude o tipo de equação da elipse clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolhendo **Equação**, mude também a cor da elipse clicando na mesma com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $F_1=(x'+c,y')$ tecla **Enter** e $F_2=(x'-c,y')$ tecla **Enter**, estes serão os focos da elipse;

8 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $C=(x',y')$ tecla **Enter**, este ponto **C** será o centro da elipse;

9 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $e=c/a$ tecla **Enter** que será a excentricidade da elipse;

10 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na elipse e terá um ponto **A** pertencente a mesma;

11 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto F_2 e depois clique no ponto **A**;

12 – Repita o passo 11, mudando somente o ponto F_2 por F_1 , mude a cor desses dois segmentos clicando no mesmo com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência;

13 – No campo de **Entrada Algébrica** e digite $s=f+g$ tecla **Enter**;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto F_2 e depois clique no ponto F_1 cujo valor é h ;

15 – Selecione a ferramenta **Reta Perpendicular** , clique no ponto **C**, depois clique no segmento h , agora selecione a ferramenta **Interseção de Dois**

Objetos , clique na reta i e na **elipse** e surgirão os pontos **B** e **D**;

16 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **B** e depois clique no ponto **D**;

17 – Selecione a ferramenta **Mediatriz** , clique no ponto **B** e depois clique no **D** e em seguida selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique na reta **k** e na **elipse** e surgirá os pontos **E** e **F**;

18 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **E** e depois clique no ponto **F**;

19 – Esconda as retas **i** e **k**, os segmentos **h**, **j** e **l** e os pontos **B**, **D**, **E** e **F**, clicando na bolinha ao lado dos mesmos na janela de álgebra;

20 – Escolha a ferramenta **Inserir Texto** , e digite ‘**Elementos da elipse:**’ tecle enter e digite ‘**Equação:**’, ainda na janela escolha o objeto **d** tecle enter e digite “**Focos:**” e escolha objeto “**F_1**” e “**F_2**” tecle enter e digite “**Distância focal:**” e escolha objeto “**h**” tecle enter e digite “**Eixo menor:**” e escolha objeto “**j**” tecle enter e digite “**Eixo maior:**” e escolha objeto “**l**” tecle enter e digite “**Centro:**” e escolha objeto “**C**” tecle enter e digite “**Excentricidade:**” e escolha objeto “**e**” e em seguida clique em **OK**;

21 – Com o botão direito do mouse clique no controle deslizante **a**, escolha **Animar** e observe o que acontece com a elipse. Repita este procedimento para parar a animação;

22 – Faça o mesmo com o controle deslizante **b**. Repita este procedimento para parar a animação;

23 – Com o botão direito do mouse clique em **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **f**, **g** e **s**. Repita este procedimento para parar a animação.

- **AVALIAÇÃO:** Espera-se que os alunos associem a elipse com sua equação e com seu gráfico, compreendam seus principais elementos, caracterizem suas propriedades e relacionem o seu gráfico com a sua equação.

QUADRO 4: Sugestão de atividade sobre a elipse

Atividade

1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 6 como $(y-y')^2/a^2+(x-x')^2/b^2 = 1$, que

mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 7 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da elipse? Que diferença você observa entre as elipses?

2- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 21? Em sua opinião, por que isso acontece?

3- O que acontece com os elementos da elipse quando se realiza o passo 22? Por que isso ocorre?

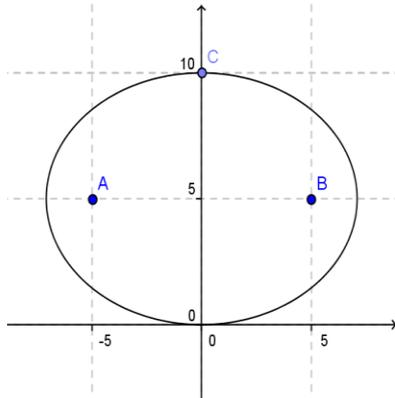
4- No passo 23 o que acontece com os valores de f , g e s ?

5- Ao efetuar os passos 21 e 22 em determinado momento temos $a=b$, o que acontece com o valor de e na elipse nesse instante e com os focos da mesma? Que outra figura geométrica temos que se parece com a elipse nesse instante?

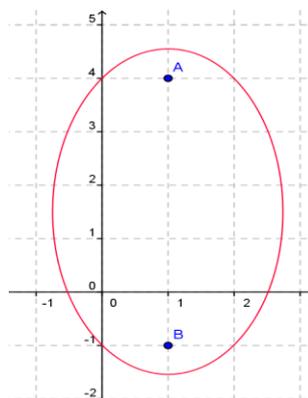
6- Observe os elementos da Janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?

7- Determine as equações reduzidas de cada cônica a seguir:

a)



b)



8- Em cada cônica do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Elipse
Equação	
Focos	
Centro	
Excentricidade	
Distância focal	
Eixo maior	
Eixo menor	

9- Dada a elipse $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 1$, determinar:

100 36

a) o centro

b) o eixo real

c) os vértices

d) o eixo imaginário

e) os focos

f) o gráfico da elipse

10- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a elipse, se necessário, circule por diversos ambientes da escola.

11- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da elipse em outras áreas do conhecimento.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da elipse
Física	
Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	
Óptica	
Tecnologias	
Outras	

12- Qual grande nome histórico está relacionado a aplicação da elipse, em especial na astronomia? _____

FONTE: Autor, 2013

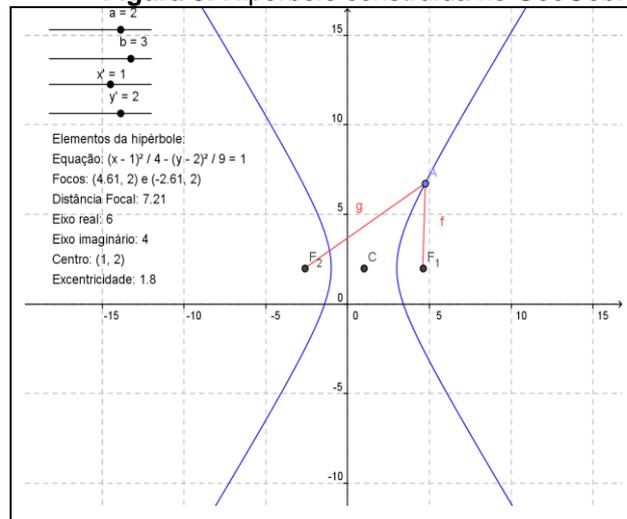
Da mesma forma que na parábola, sugerimos que o professor complemente com suas intervenções para uma melhor compreensão.

4.4.3 Sessão 3: Construção de uma Hipérbole

Nesta sessão, assim como na elipse, também apresentamos algumas das propriedades, os elementos principais e buscamos mostrar como a equação da hipérbole muda quando variamos alguns de seus elementos. Discutimos também a propriedade da distância de um ponto da hipérbole aos focos que a caracteriza.

O professor, ao construir a hipérbole no GeoGebra, pode discutir outras questões pertinentes a este conteúdo durante a realização desta atividade com os alunos. A construção da hipérbole utilizando o GeoGebra 4.2 seguindo as etapas sugeridas na sessão de ensino 3 que trata dessa cônica é apresentada na figura 17.

Figura 3: Hipérbole construída no GeoGebra



FONTE: Autor, 2013

FERRAMENTAS NECESSÁRIAS:



Mover



Novo ponto



Controle Deslizante



Interseção de Dois Objetos



Reta Perpendicular



Segmento definido por Dois Pontos



Inserir Texto



Mediatriz

A estrutura dessa sessão é a seguinte:

- **OBJETIVO:** Proporcionar a aprendizagem sobre a hipérbole, tais como sua equação algébrica, seu gráfico, seus principais elementos, suas propriedades e a relação entre o seu gráfico e sua equação.
- **TEMPO PREVISTO:** 2 aulas de 50 minutos.
- **PÚBLICO ALVO:** Alunos do 3º ano do ensino médio que tenham estudado em geometria analítica o ponto, a reta e a circunferência.
- **ETAPAS:** Utilizando a versão 4.2 do GeoGebra, o aluno seguirá as 22 etapas relacionadas abaixo:

1 – Abra um novo arquivo no GeoGebra;

2 – Selecione a ferramenta **Controle Deslizante** , clique na **Zona Gráfica** chame o deslizante de '**a**', defina o intervalo de **-5 a 5** e o incremento **0,1**, clique em **Aplicar**;

3 – Repita o passo 2, mudando somente o nome do deslizante para '**b**', faça o mesmo para '**x**' e '**y**';

4 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $c=\sqrt{a^2+b^2}$;

5 – No campo de **Entrada Algébrica** digite o seguinte código: $(x-x')^2/a^2-(y-y')^2/b^2=1$, mude o tipo de equação da hipérbole clicando na mesma com o botão direito do mouse e escolhendo **Equação**;

6 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $F_1=(x'+c,y')$ tecele enter e em seguida digite $F_2=(x'-c, y')$ e tecele enter, estes serão os focos da hipérbole;

7 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $C=(x',y')$, este ponto **C** será o centro da hipérbole;

8 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $e=c/a$ que será a excentricidade da hipérbole;

9 – Selecione a ferramenta **Novo Ponto** , clique na hipérbole e marca o ponto **A**;

10 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto F_1 e em seguida no ponto **A**, clica novamente no ponto **A** depois no ponto F_2 e teremos os segmentos F_1A e AF_2 , cujos valores são **f** e **g**;

11 – No campo de **Entrada Algébrica** digite $s=abs(f-g)$; mude a cor dos segmentos **f** e **g** e da constante **s** clicando em um deles com o botão direito do mouse, escolhendo **Propriedades**, depois **Cor** e escolha a cor de sua preferência, para mudar a cor dos outros dois objetos basta selecioná-los e escolher a mesma cor mude também a cor da hipérbole clicando na mesma e escolhendo a cor de sua preferência;

12 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto F_2 e depois clique no ponto F_1 , cujo valor é **h**;

13 – Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** , clique no segmento **h** e na **hipérbole** e surgirão os pontos **B** e **D**;

14 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **B** e depois clique no ponto **D** e teremos o segmento **i**;

15 – Selecione a ferramenta **Mediatriz** , clique no ponto **F₁** e depois clique no **F₂** e terá a reta **j**, em seguida selecione a ferramenta **Segmento com**

Comprimento Fixo , clique em **C** digite **b** clique em **OK**, selecione a ferramenta **Mover** e arraste o ponto **E** noventa graus no sentido anti-horário, repita este procedimento e terá o ponto **F**, arraste-o noventa graus no sentido horário.

16 – Esconda a reta **j** clicando na bolinha ao lado da letra **j** na janela algébrica, faça o mesmo com os segmentos **k** e **l**;

17 – Selecione a ferramenta **Segmento definido por Dois Pontos** , clique no ponto **E** e depois clique no ponto **F** e teremos o segmento **m**;

18 – Esconda os segmentos **h**, **i** e **m** e os pontos **B**, **D**, **E** e **F** clicando na bolinha ao lado dos mesmos na janela algébrica;

19 – Selecione a ferramenta **Inserir Texto** , clique área gráfica e digite '**Elementos da hipérbole:**' tecle enter e digite '**Equação:**' e escolha objeto '**d**' tecle enter e digite '**Focos:**' e escolha objeto '**F₁**' e '**F₂**' tecle enter e digite '**Distância focal:**' e escolha objeto '**h**' tecle enter e digite '**Eixo real:**' e escolha objeto '**m**' tecle enter e digite '**Eixo imaginário:**' e escolha objeto '**i**' tecle enter e digite '**Centro:**' e escolha objeto '**C**' tecle enter e digite '**Excentricidade:**' e escolha objeto '**e**' e clique em **OK**;

20 – Com o botão direito do mouse clique no controle deslizante **a**, escolha **Animar** e observe o que acontece com a hipérbole. Repita este procedimento para parar a animação;

21 – Faça o mesmo com o controle deslizante **b**. Repita este procedimento para parar a animação;

22 – Com o botão direito do mouse clique em **A** e escolha **Animar** e observe os valores de **f**, **g** e **s**. Repita este procedimento para parar a animação.

- **AVALIAÇÃO:** Espera-se que os alunos associem a hipérbole com sua respectiva equação, também com seu gráfico, entendam quais são seus principais elementos, caracterizem suas propriedades e relacionem o seu gráfico com a sua equação.

QUADRO 5: Sugestão de atividade sobre a elipse

Atividade

- 1- Repita o procedimento utilizando a equação do passo 6 como $(y-y')^2/a^2 - (x-x')^2/b^2 = 1$, que mudanças devemos efetuar nos pontos do passo 7 como F_1 e F_2 para que continuem sendo os focos da hipérbole? Que diferença você observa entre as hipérbolas?
- 2- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 20? Em sua opinião, por que isso acontece?
- 3- O que acontece com os elementos da hipérbole quando se realiza o passo 21?
- 4- No passo 22 o que acontece com os valores de **f**, **g** e **s**? Por que isso ocorre?
- 5- Faça o que se pede no passo 20 agora com os valores de x' e, em seguida, faça com y' . Observe o quais elemento da hipérbole varia e preencha o quadro abaixo.

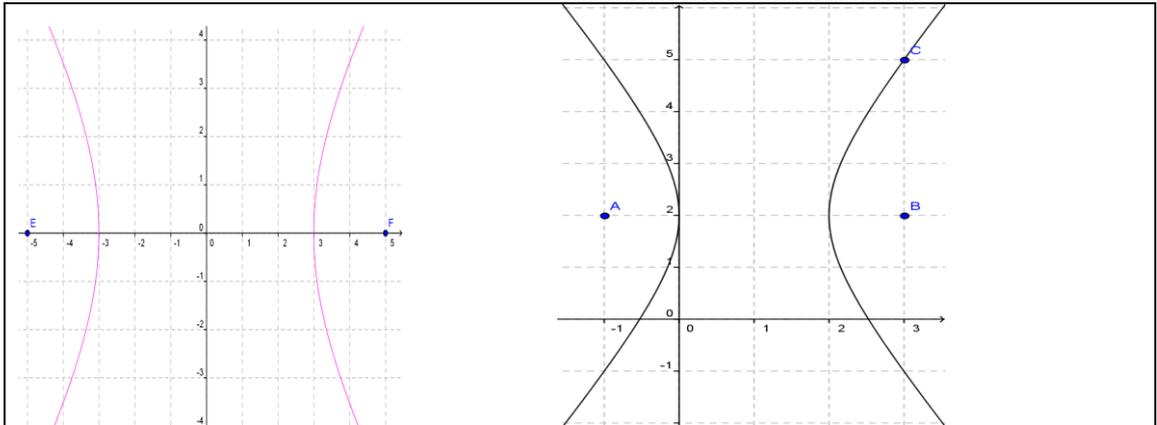
Elementos da hipérbole	Varia	Não varia
Equação		
Focos		
Distância focal		
Eixo real		
Eixo imaginário		
Centro		
Excentricidade		

- 6- Observe os elementos da janela de Visualização e os mesmos na Janela de Álgebra, que conclusões podemos tirar da relação que existe entre cada um deles?

- 7- Determine as equações reduzidas de cada cônica a seguir:

a)

b)



8- Em cada cônica do exercício anterior determine cada um de seus elementos preenchendo o quadro a seguir:

Elementos	Hipérbole
Equação	
Focos	
Centro	
Excentricidade	
Distância focal	
Eixo real	
Eixo imaginário	

9- Dada a hipérbole $(x + 2)^2 - (y + 1)^2 = 1$, determinar:

100 36

- a) o centro
- b) o eixo real
- c) os vértices
- d) o eixo imaginário
- e) os focos
- f) o gráfico da hipérbole

10- Olhando ao seu redor e observando atentamente o ambiente que o cerca, procure lembrar de outros lugares e situações, e cite objetos do cotidiano que lembram a hipérbole, se necessário, circule por diversos ambientes da escola.

11- Cite alguns exemplos de acordo com a aplicação da hipérbole em outras áreas do conhecimento.

Áreas	Exemplo(s) de aplicação da hipérbole
Física	

Astronomia	
Engenharia	
Arquitetura	
Óptica	
Tecnologias	
Outras	

12- Quais grandes nomes históricos estão relacionados a hipérbole?

FONTE: Autor, 2013

Aqui também sugerimos que seja feito um complemento por parte do professor com suas explicações e resoluções de exercícios para que os objetivos propostos sejam alcançados.

Ao trabalhar desta forma o professor estará em consonância com o artigo 36 da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) que trata do currículo do ensino médio no qual em seu inciso I cita que deve destacar a educação tecnológica básica além de citar no inciso II que deve ser adotada metodologias de ensino que estimulem a iniciativa dos estudantes. Também iremos mobilizar outras ferramentas na visualização das cônicas de acordo com a teoria da Mudança de Quadros proposta por Régine Douady (1987) explorando-as, ao mesmo tempo, no quadro algébrico e no geométrico. E ao permitir que as propriedades e características dessas seções sejam mais bem assimilados pelos alunos através do GeoGebra, estamos, de certo modo, realizando algumas transformações e adaptações a qual Chevallard (1991) chama de Transposição Didática.

3 CONCLUSÃO

Com este trabalho pretendemos oferecer ao professor de matemática do ensino médio uma proposta de ensino diferenciada para as seções cônicas, desta forma procuramos trabalhar as definições, propriedades, equações, elementos

principais, gráficos e também a relação existente entre eles de uma forma dinâmica utilizando o software GeoGebra.

Acreditamos que ao trabalhar desta forma e fazendo as complementações necessárias, o professor irá fazer com que aluno não só aprenda este conteúdo enquanto saber a ensinar como também desperte o interesse pelo fato de compreender que as seções cônicas não são apenas mais um tópico a ser estudado por compor o currículo contido no livro didático e sim um tópico rico em sua constituição que foi construído ao longo dos séculos e possui diversas utilidades também em outras áreas do conhecimento.

Buscamos provocar uma reflexão acerca do ensino deste conteúdo e incentivar o uso da história da matemática como recurso pedagógico no ensino da matemática, o uso de suas aplicações tanto no cotidiano quanto em outras áreas e o uso do software de geometria dinâmica GeoGebra como instrumento de visualização e manipulação das propriedades de cada cônica.

Para tanto sugerimos uma abordagem de alguns dos principais tópicos da história deste tema desde a obra de Apolônio de Perga até as aplicações modernas das seções cônicas como forma de incentivo pela busca de resultados positivos no ensino.

Nossa intenção foi mostrar ao professor uma alternativa para o ensino das seções cônicas em que o aluno construa e perceba por ele mesmo as relações existentes entre seus conceitos utilizando as mudanças de quadros propostas por Douady (1987), principalmente o quadro algébrico e o geométrico.

Esperamos que este estudo possa contribuir para uma melhor compreensão do aluno acerca de nosso tema e que auxilie o professor em seu ensino.

4 REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos de Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado**. Tradução Claudia Gilman. Madri, 1991.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB - Lei nº 9394/96, de 20 de**

dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

HENRIQUES, Afonso. **Dinâmica dos elementos da geometria plana em ambiente computacional cabri-géométri II.** Ilhéus: Editus, 2001.

HOHENWARTER, Markus; HOHENWARTER, Judith. **Ajuda GeoGebra: Manual Oficial da Versão 3.2.** Tradução e adaptação para português de Portugal António Ribeiro. Lisboa, 2009.