ROTEIRO PRÁTICO

Esboço de Gráficos

Funções Afim e Quadrática

Por: **Vívia Dayana Gomes dos Santos**
Email: vidaya14@hotmail.com

Maceió – AL
2012

Equipe de Elaboração:
Vívia Dayana Gomes dos Santos
Amauri da Silva Barros (Orientador)

Textos:
Vívia Dayana Gomes dos Santos

Revisão:
Allan César Silva de Lima
Amauri da Silva Barros (Orientador)
Ediel Azevedo Guerra

Programa Visual:
Vívia Dayana Gomes dos Santos

Figuras:
Vívia Dayana Gomes dos Santos
Google

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

S327e Santos, Vívia Dayana Gomes dos
Esboço de gráficos : funções afins e quadráticas : roteiro prático / Vívia Dayana Gomes dos Santos – 2012.
29 p. il., fots. color.

Produto educacional apresentado ao PPGECIM pelo mestrando, como exigência parcial para obtenção do título de mestre.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Funções afins e quadráticas. 3. Software GeoGebra. 3. Gráficos (Matemática). 4. Ensino fundamental. I. Título.

CDU: 511:37

Este roteiro, dirigido aos alunos do 1º ano do Ensino Médio, apresentará uma maneira prática, segura e eficiente para o esboço de gráficos das funções afim e quadrática. O aluno que fizer uso dela encontrará sempre a definição formal de cada uma dessas funções e será induzido a verificar o comportamento gráfico das mesmas, identificando sua forma gráfica característica.

Feito isso, mostraremos os passos necessários para o esboço manual e virtual de seus gráficos. Alguns exemplos serão analisados no final de cada tema. Disponibilizamos exercícios para que o leitor possa treinar o que foi apresentado.

Tenham um bom proveito!

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O conceito de função permeia diversas modalidades da matemática moderna, da química, biologia, física, economia, bem como de situações corriqueiras da vida. Não é difícil nos depararmos com situações em que uma grandeza depende de outra. Por exemplo, o valor a pagar de uma conta de energia, água e gás de nossa residência é proporcional ao consumo mensal de cada um desses itens citados. Um exemplo do aparecimento do conceito de função em outros tópicos de matemática pode ser percebido no cálculo da área de figuras planas. A área ***A*** de um quadrado, por exemplo, depende do valor do seu lado ***l***. Essa dependência é expressa pela lei matemática ***A(l) = l²***.

Sendo assim, é importantíssimo compreendermos o conceito de função, analisar suas aplicações e aprender a transitar entre suas diferentes formas de representações, a saber: algébricas (fórmulas), tabulares e gráficas.

Este roteiro tem como foco o esboço de gráficos das funções afins e quadráticas. Muitos têm feito uso de recursos computacionais para realizar este processo. Utilizando softwares de geometria dinâmica, professores-pesquisadores da área de ensino de matemática têm contribuído de maneira significativa para o progresso dos discentes no que tange a análise e compreensão das características e propriedades gráficas de uma função.

Apesar do incremento contínuo em novas tecnologias e da acessibilidade à mesma, temos ciência de que nem todos os estabelecimentos de ensino dispõem de um laboratório de informática adequado, em especial os das redes públicas de ensino. Das que dispõem, é comum encontrarmos computadores com defeitos ou então, impossibilitados de manuseio por falta de licença do governo.

Muitos são os empecilhos referentes ao uso e manuseio de computadores para os alunos que fazem parte da classe social baixa. Visando este público, disponibilizamos aqui uma maneira prática e segura de esboçar gráfico fazendo uso de materiais como: papel quadriculado, régua e lápis e/ou caneta.

1. FUNÇÃO AFIM

Uma Função Afim, também conhecida como **função polinomial do 1º grau** ou simplesmente **função do 1º grau**, é toda relação real $f\colon \Re \to \Re$ que pode ser escrita na forma

$$f(x) = y = ax + b,$$

Os números reais a e b são chamados de coeficientes da função:

a - Coeficiente angular

b - Coeficiente Linear

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax + b$ é o conjunto dos números reais: $D(f) = Im(f) = \Re$.

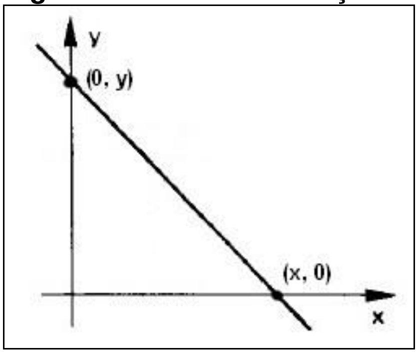
O gráfico de uma função afim, na variável x, é uma reta não paralela ao eixo das abscissas. Para esboçá-lo iremos utilizar um princípio da Geometria Plana: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os contêm.

Assim, basta identificar apenas dois pontos dessa função no plano cartesiano e com o auxilio de uma régua traçar a reta que passa por esses dois pontos.

Para facilitar o trabalho de localização dos pontos, bem como para termos mais precisão no esboço do gráfico, os dois pontos pertencentes ao gráfico da função que iremos escolher são os pontos cujo gráfico intersecta os eixos coordenados, isto é, o eixo das abscissas (eixo - OX) e o eixo das ordenadas (eixo - OY).

Tomemos como referência a figura abaixo:

Figura 1: Gráfico da função afim



Fonte: Iezzi, 1977

NO EIXO – OX: Observamos que o ponto onde o gráfico intersecta o eixo das abscissas, o valor de y é nulo. Fazendo esta substituição na função $y = ax + b$ chegamos a uma equação do 1º grau. Resolvendo esta equação obtemos:

$$0 = ax + b \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b$$

$$x = -b/a.$$

Logo, o ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo das abscissas tem as seguintes coordenadas: (- b/a, 0).

O valor $x = -b/a$ é denominado **zero ou raiz** da função afim, ou seja, o ponto do domínio da função cuja imagem é nula.

NO EIXO – OY: O ponto onde o gráfico intersecta o eixo das ordenadas tem o valor de x nulo. Fazendo a substituição na função $y = f(x) = ax + b$ obtemos,

$$f(0) = a.0 + b \Rightarrow f(0) = 0 + b \Rightarrow y = f(0) = b.$$

Assim, o ponto em que o gráfico da função afim intersecta o eixo OY tem as coordenadas (0, b). Percebemos assim que não é necessário efetuar cálculos para identificar o ponto cujo gráfico corta o eixo das ordenadas. Basta observar o valor do coeficiente linear b na função $f(x) = ax + b$.

Tabelando o que acabamos de ver, temos:

Tabela 1: Pontos que intersecta os eixos coordenados

x	y = f(x)
0	b
-b/a	0

Fonte: Santos, 2011

1.1 Gráfico de uma Função Afim – Papel e Lápis

Tendo em mente o que foi exposto anteriormente, vamos fazer o esboço do gráfico de uma função afim no ambiente Papel e Lápis. Para isto, precisaremos de uma folha de papel A4 para efetuar os cálculos necessários, uma folha de papel quadriculado para o esboço do gráfico, lápis e borracha.

Exemplo 1: Construa, no plano cartesiano, o gráfico da função definida por $y = 2x - 3$, sendo x e y variáveis reais.

Usando de praticidade e recorrendo à Tabela 1 temos:

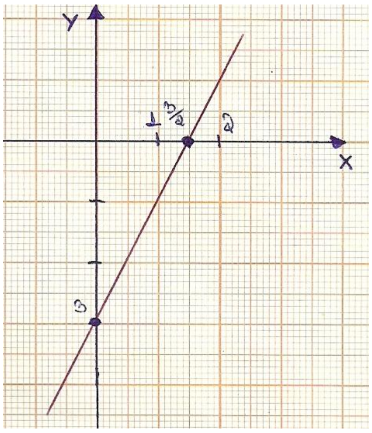
Tabela 2: Pontos em que y = 2x – 3 intersecta os eixos coordenados

x	y = f(x)
0	- 3
3/2	0

Fonte: Santos, 2011

Marcando estes dois pontos no papel quadriculado e fazendo uso de uma régua para ligar tais pontos, obtemos o gráfico da função dada.

Figura 2: Gráfico de y = 2x - 3



Fonte: Santos, 2011

Exemplo 2: Esboce o gráfico da função definida por $y = - x + 7$, sendo x e y variáveis reais.

Seguiremos os mesmos passos do exemplo anterior.

Tabela 3: Pontos em que y = - x + 7 intersecta os eixos coordenados

x	y = f(x)
0	7
7	0

Fonte: Santos, 2011

Basta apenas marcar estes pontos no papel quadriculado e traçar a reta que por eles passa.

Exemplo 3: Esboce o gráfico da função definida por $y = 2x$, sendo x e y variáveis reais.

Tabela 4 – Pontos em que y = 2x intersecta os eixos coordenados

x	y = f(x)
0	0
0	0

Fonte: Santos, 2011

Neste caso, notamos que há uma coincidência de pontos. Ambos os pontos têm coordenadas (0, 0), ou seja, o gráfico da função $f(x) = 2x$ é uma reta que passa pela origem.

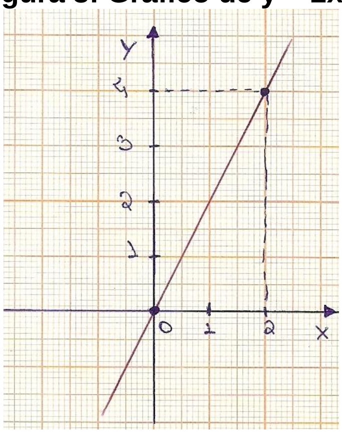
Relembrando outro princípio da Geometria Plana, de que por um único ponto passam infinitas retas, podemos concluir que não é possível obter o gráfico da função $f(x) = 2x$. Assim, precisamos de um ponto diferente de (0, 0) pertencente ao gráfico da função.

Para isso, basta atribuir qualquer valor real a x e obter assim, um correspondente y nomeando um ponto que também pertence a função.

Tomando $x = 2$, obtemos $y=f(2) = 2.\ 2 = 4$.

Portanto o ponto (2, 4) pertence a o gráfico da função dada. Com isto, temos o gráfico:

Figura 3: Gráfico de y = 2x



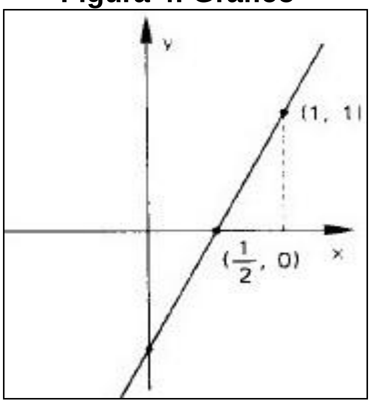
Fonte: Santos, 2011

Funções Afins $f(x) = ax + b$ com $b = 0$, ou seja, funções do tipo $f(x) = ax$ são denominadas ***Funções Lineares***.

Da mesma maneira que, conhecendo a expressão determinante da função, é possível esboçar seu gráfico, conhecendo o gráfico de uma função é possível determinar a função que o define, desde que no mínimo dois pontos sejam identificados. Note o exemplo,

Exemplo 4: Dado o gráfico abaixo, determine a função que o define.

Figura 4: Gráfico



Fonte: Iezzi, 1977

Note que os pontos (1, 1) e (1/2, 0) pertencem ao gráfico mostrado ao lado, que é uma reta. Logo, é gráfico de uma função do tipo

$$f(x) = y = ax + b.$$

Sendo assim, para escrever a função representada por este gráfico precisamos descobrir os valores dos coeficientes *a* e *b*.

O ponto (1, 1) nos diz que para $x = 1$ obtivemos $y = 1$. Fazendo a substituição na expressão $y = ax + b$, temos

$$1 = a.\,1 + b \Rightarrow$$
$$a + b = 1.\ (i)$$

Fazendo o mesmo para o ponto (1/2, 0) obtemos:

$$0 = a.\,½ + b \Rightarrow a/2 + b = 0 \Rightarrow$$
$$a + 2b = 0.\ (ii)$$

Resolvendo agora o sistema formado pelas equações *(i)* $a + b = 1$ e *(ii)* $a + 2b = 0$, obtemos $a = 2$ e $b = -1$.

Logo, a função cujo gráfico foi dado é $f(x) = 2x – 1$.

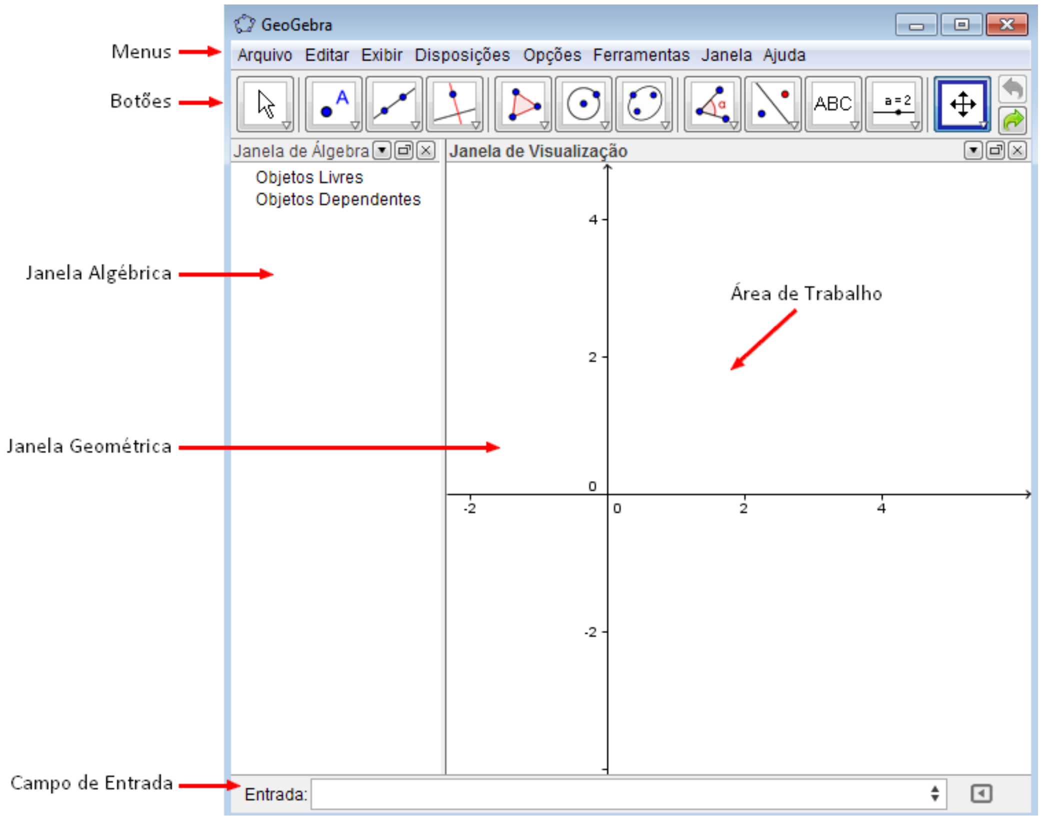
1.2 Gráfico da Função Afim – GeoGebra

Para esboçar o gráfico da função afim fazendo uso do computador, contaremos com o auxilio de um software de geometria dinâmica, gratuito e de fácil manuseio, denominado GeoGebra. Para adquiri-lo basta acessar o site oficial do GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms) e fazer o download.

GeoGebra é um programa matemático desenvolvido pelo austríaco Markus Hohenwarte, que possibilita fazer construções geométricas (pontos, vetores, segmentos, retas e polígonos) de modo “aleatório”, até mesmo aquelas que exigem a precisão de régua e compasso. Além disso, este software permite a visualização de gráficos de funções a partir de expressões algébricas.

Uma vez instalado no computador, com um clique duplo no ícone GeoGebra será aberta a seguinte janela:

Figura 5: GeoGebra



Fonte: Santos, 2011

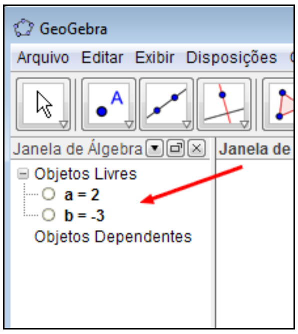
As ferramentas acima discriminadas são facilmente manipuláveis. Em caso de dúvidas, pode-se acessar o fórum (http://www.geogebra.org/forum/) que está disponível no site oficial do GeoGebra.

A princípio, vamos esboçar o gráfico da função dada no **Exemplo 1**, *f(x) = 2x 3*, com o auxílio do GeoGebra.

Para tanto, siga os seguintes passos:

1º) No **Campo de Entrada** digite “a = 2” (sem as aspas) e aperte no teclado do computador a tecla ENTER. Repita o mesmo processo agora digitando “b= - 3”. Note que estes valores ficarão impressos na **Janela Algébrica**.

Figura 6: Janela Algébrica

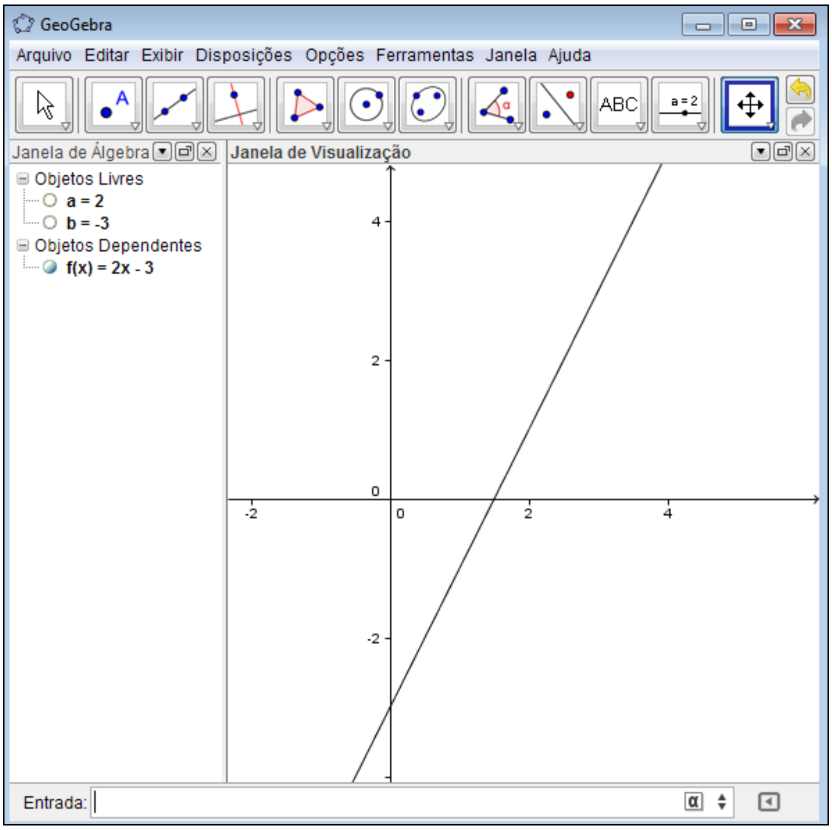


Fonte: Santos, 2011

2º) Agora digite no **Campo de Entrada** a expressão "f(x) = a*x + b" e aperte ENTER.

O que aconteceu? Isso mesmo, o gráfico da função $f(x) = 2x - 3$ está esboçado (Figura 7).

Figura 7: Gráfico de y = 2x -3

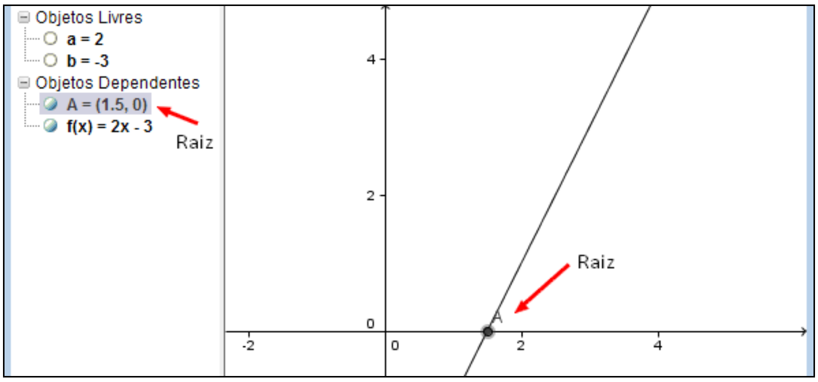


Fonte: Santos, 2011

Com base no esboço feito, vamos identificar a raiz desta função. Para isto, no GeoGebra, clique no botão **Novo Ponto** (o segundo botão da esquerda para direita) e escolha a opção **Intersecção de Dois Objetos**.

Uma vez selecionada esta opção, clique no eixo OX e logo em seguida, no gráfico da função esboçada. Pronto! Um ponto, indicado pela letra A, aparecerá e o valor de sua abscissa é a raiz da função considerada. ☺

Figura 8: Raiz da função f(x) = 2x – 3

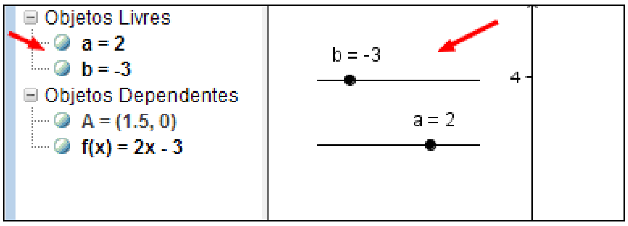


Fonte: Santos, 2011

Ainda tomando como referência o esboço feito, na **Janela Algébrica** marque as bolinhas das variáveis digitadas inicialmente (*a* e *b*). Note que no canto superior da **Área De Trabalho,** aparecerá dois segmentos de retas, uma para o valor de “a” e outra para o valor de “b”.

Com o mouse, selecione o botão **Mover** e pressionando o botão direito do mouse sobre umas as bolinhas do seguimento, movimente-as e observe o que acontece.

Figura 9: Função “Mover”



Fonte: Santos, 2011

O que pode perceber?

Sendo assim, é possível obter os gráfico das funções dos **Exemplo 2** e **3** da seção anterior.

Faça-os!

1.3 Hora de praticar

1) Fazendo uso dos recursos apresentados anteriormente, esboce os gráficos das seguintes funções:

a. $y = 3x + 1$

b. $y = 2/5\ x - 1$

c. $y = -3x - 6$

d. $y = -x + 1$

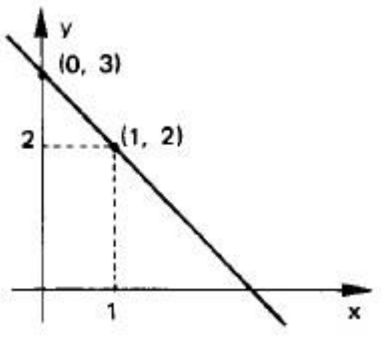
e. $y = 7x$

f. $y = -4x$

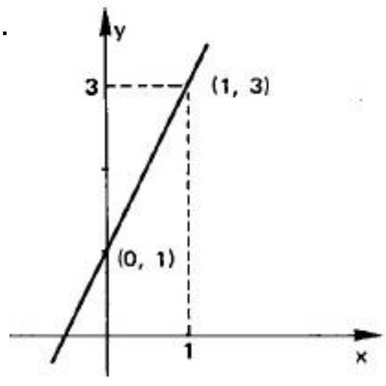
Diante desta questão, pode-se notar certo padrão com respeito à inclinação da reta, ou seja, crescimento e decrescimento da função afim. Você é capaz de identificá-lo?

2) Para cada gráfico abaixo, determine a função que o define:

a.



b.



2. FUNÇÃO QUADRÁTICA

A Função Quadrática, também conhecida como **função polinomial de 2º grau** ou simplesmente **função de 2º grau**, é toda relação real $f: \Re \rightarrow \Re$ que pode ser escrita da forma

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,$$

com *a, b e c* números reais e $a \neq 0$.

Os conjuntos domínio e imagem da função real $f(x) = ax^2 + bx + c$ são, respectivamente, os conjuntos $\Re$ e $\{y \in \Re \,/\, y \geq y_v = -\Delta / 4a\}$.

O gráfico de uma função quadrática é uma curva denominada **parábola** cuja concavidade (abertura) será voltada para cima se o coeficiente do termo x^2 for positivo e, para baixo se este mesmo coeficiente for um valor negativo.

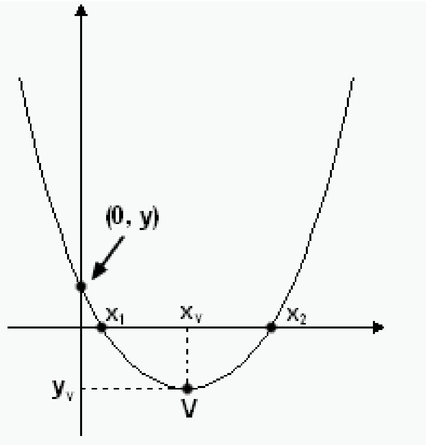
Figura 10: Parábola

Fonte: Google, 2011

Para o esboço gráfico da função do 2º grau, ao invés de construirmos uma tabela para obter diversos pontos pertencentes ao gráfico (o que não garante precisão com respeito ao comportamento da parábola) iremos encontrar alguns pontos específicos que nos garantirão mais segurança ao esboçar no papel a representação gráfica da função quadrática. Estes pontos são: o ponto em que o gráfico intersecta o eixo OY, as raízes quando existir e o vértice.

Veja a figura abaixo:

Figura 11: Pontos principais da parábola



Fonte: Goolge, 2011

1°) PONTO EM QUE O GRÁFICO INTERSECTA O EIXO OY:

Para isto, basta fazer $x = 0$ na função $f(x) = ax^2 + bx + c$ para obter

$$f(0) = y = a.\ 0^2 + b.\ 0 + c \Rightarrow y = c.$$

Portando, este ponto tem coordenadas (0, c).

2º) RAÍZES:

As raízes de uma função são os valores de *x* para os quais f(x) = 0. Sendo assim, nos deparamos com a equação do 2º grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Para resolvê-la fazemos uso da expressão:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

onde pode-se fazer $\Delta := b^2 - 4ac$.

A quantidade de raízes reais de uma função quadrática depende do valor obtido para o radicando, denominado discriminante, a saber:

- Quando Δ é positivo, há duas raízes reais e diferentes;
- Quando Δ é zero, há só uma raiz real;
- Quando Δ é negativo, não há raiz real.

3º) VÉRTICE:

O vértice da parábola é o ponto extremo dela, ponto em que a curva muda de sentido. É um ponto que fica exatamente entre as raízes x_1 e x_2, quando estas existem. Logo, x_v é a média aritmética dessas raízes. Uma vez encontrado o valor de x_v, temos que $y_v = f(x_v)$.

Após os devidos cálculos, temos que as coordenadas do vértice da parábola são

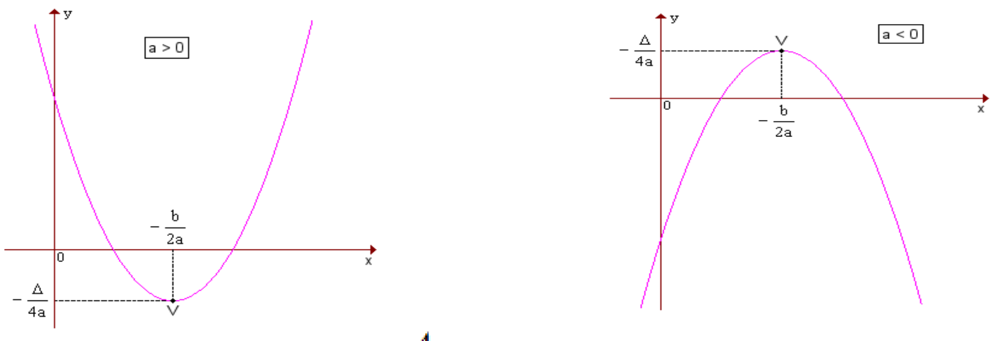
$$V = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right).$$

OBSERVAÇÕES:

- Se a > 0, o vértice V é chamado de *ponto mínimo* da função quadrática e se a < 0, V é *ponto máximo* da função.
- O eixo de simetria da parábola é a reta vertical $x = x_v$.

A **IMAGEM** da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ também fica bem determinada a partir da identificação do vértice da parábola. A saber:

Figura 12: Imagem da função



$$Im(f) = \{ y \in \Re \,/\, y \geq y_v = -\frac{\Delta}{4a} \}$$

$$Im(f) = \{ y \in \Re \,/\, y \leq y_v = -\frac{\Delta}{4a} \}$$

Fonte: Google, 2011

Diante da exposição feita acima e de posse dos mesmos materiais usados para o esboço de funções do tipo afim no ambiente Papel e Lápis, analisemos os exemplos abaixo.

2.1 Gráfico da Função Quadrática – Papel e Lápis

Exemplo 4: Faça o gráfico de cada uma das funções abaixo, determinando o respectivo conjunto imagem.

a) $y = x^2 - 9$.

1º) Pela expressão acima temos que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y é (0, c) = (0, -9).

2º) Para o cálculo das raízes temos que

$$\Delta = b^2 - 4ac = 0^2 - 4.\ 1\ .\ (-9) = 36 > 0.$$

Logo, a função tem duas raízes reais distintas, asaber;

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 - \sqrt{36}}{2.1} = \frac{-6}{2} = -3$$

e

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{0 + \sqrt{36}}{2.1} = \frac{6}{2} = 3.$$

Vale destacar que como trata-se de uma equação do segundo grau incompleta podemos escolher outro caminho para calcular suas raízes mas fizemos isso usando a fórmula para obter mais informações, o discriminante por exemplo.

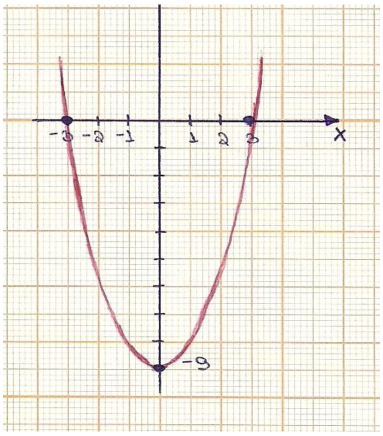
3º) Calculando agora x_v e y_v, obtemos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \text{e} \quad y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-36}{4.1} = -9.$$

Portanto, *V = (0, -9)*.

Agora somos capazes de esboçar com precisão o gráfico da função dada.

Figura 13: Gráfico de y = x² - 9



Fonte: Santos, 2011

O conjunto imagem é

Im(f) = {y ∈ ℜ/ y ≥ - 9}.

b) $y = x^2 - x + 1/4$

1º) Temos que o ponto em que o gráfico intersecta o eixo y é (0, c) = (0, 1/4).

2º) Para o cálculo das raízes temos:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.\ 1\ .(1/4) = 1 - 1 = 0.$$

Logo, a função tem um zero real duplo, a saber:

$$x_1 = x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{0}}{2.1} = \frac{1}{2}.$$

3º) Calculando x_v e y_v, obtemos

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.1} = \frac{1}{2}$$ e $$y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{0}{4.1} = 0.$$

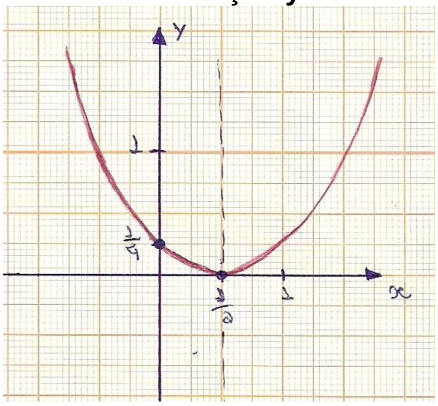
Portanto, *V = (1/2, 0)*.

Marcando este ponto no plano cartesiano temos dificuldade para identificar a curva, pois a única raiz é igual à abscissa do vértice. Neste caso, usando a simetria da parábola e escolhemos mais dois pontos. De preferência escolhemos x_1 e x_2 tais que $x_1 < x_v < x2$, ou ainda, explorando a simetria da parábola podemos escolher x_1 e x_2 tais que

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

O gráfico:

Figura 14: Gráfico da função $y = x^2 - x + 1/4$



Fonte: Santos, 2011

O conjunto imagem desta função é *$Im(f) = \{y \in \Re / y \geq 0\}$.*

RESUMINDO:

- Se $\Delta > 0$, trabalhamos com a tabela

Tabela 5: Se $\Delta > 0$

x	y = f(x)
x_1	0
x_v	y_v
x_2	0
0	c

Fonte: Santos, 2011

- Se $\Delta \leq 0$, trabalhamos com a tabela

Tabela 6: Se $\Delta \leq 0$

x	y = f(x)
x_1	y_1
x_v	x_v
x_2	y_2
0	c

Fonte: Santos, 2011

Onde $x_1 < x_v < x_2$. Se escolhermos x_1 e x_2 valores simétricos em relação à reta $x = x_v$ nossas contas serão simplificadas por conta da simetria da parábola.

No caso de $\Delta = 0$, $x = x_v$ é a única raiz da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

2.2 Gráfico de uma Função Quadrática – GeoGebra

Tomando passos semelhantes aos que foram tomados para o esboço gráfico de funções afins no GeoGebra, iremos fazer o esboço do gráfico das funções quadráticas apresentadas no **Exemplo 4**.

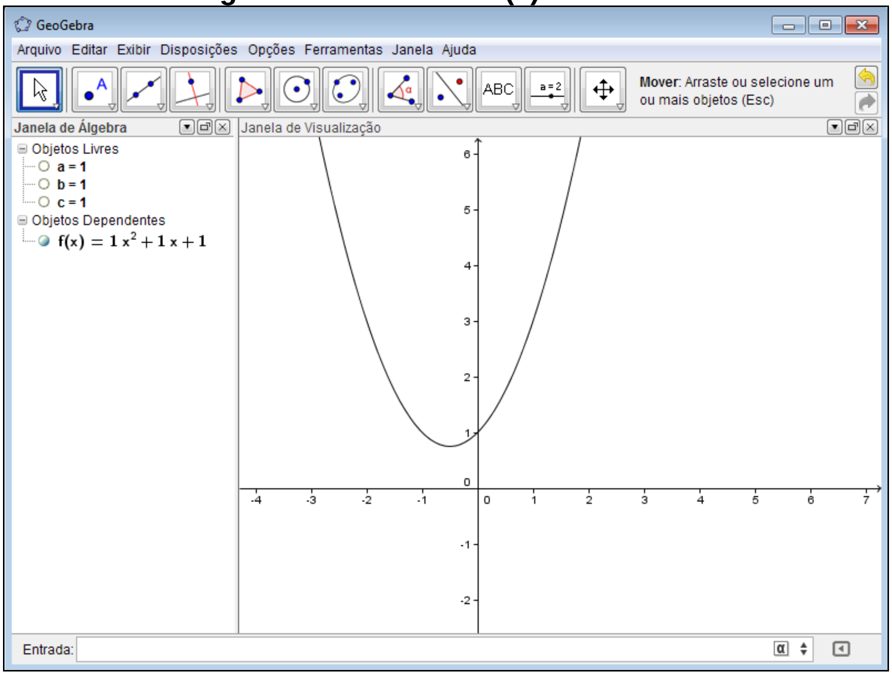
Generalizando o gráfico para funções quadráticas, abra o GeoGebra e digite no **Campo de Entrada** *"a = 1"* (sem as aspas) e em seguida clique em ENTER. Repita o mesmo processo para *"b = 1"* e *"c = 1"*. Estes são os coeficientes da função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Clique nas bolinhas que apareceram na **Janela Algébrica** para que estes coeficientes fiquem visíveis na **Área de Trabalho**.

Agora, digite novamente no **Campo de Entrada** "f(x) = a*x^2 + b*x + c". Note que aparecerá o gráfico da função $f(x) = x^2 + x + 1$.

Figura 14: Gráfico de $f(x) = x^2 + x + 1$



Fonte: Santos, 2011

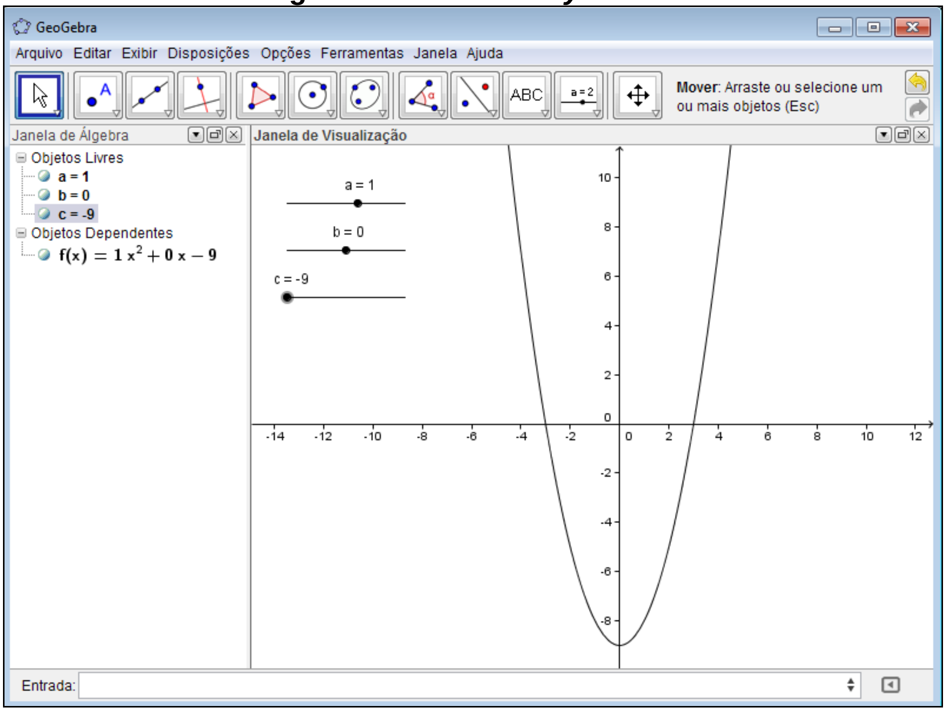
Para o esboço do gráfico que desejamos, basta selecionar o botão **Mover** e arrastar os coeficientes a, b e c de tal modo que tenhamos as funções

$y = x^2 - 9$ (Figura 15) e $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$ (Figura 16).

Observação: Se por acaso, a reta onde está o coeficiente não obtiver o valor desejado, isto pode ser alterado clicando sobre ele com o botão direito no mouse e selecionar a opção **Propriedades** para alterar o intervalo.

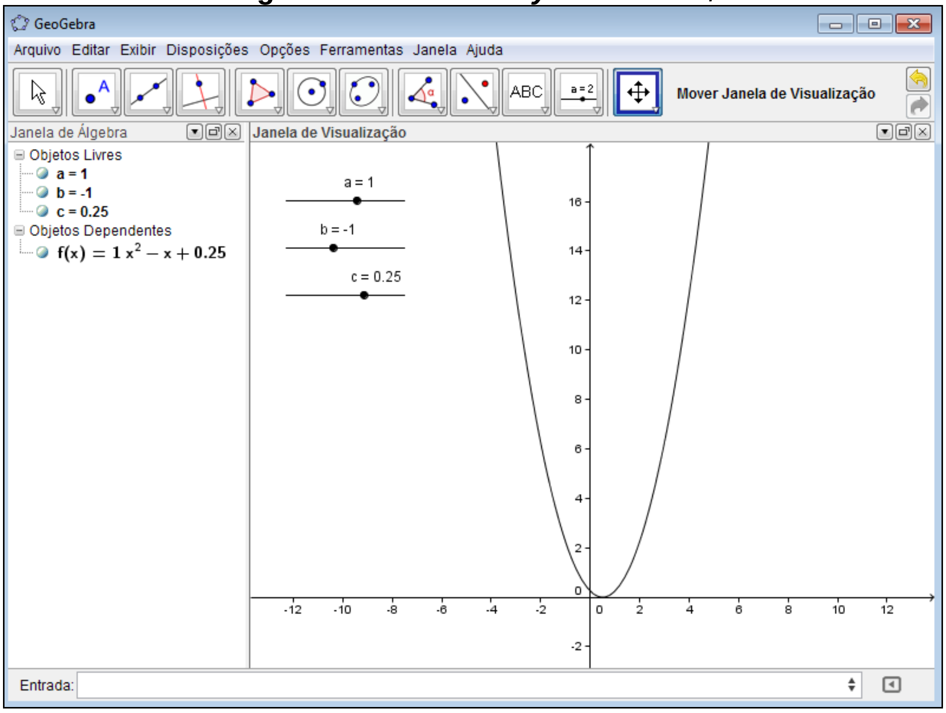
À medida que modifica cada coeficiente, independentemente, observe o que cada um deles interfere em relação à posição do gráfico da função quadrática. É possível padronizar? Se for, faça isso!!

Figura 15: Gráfico de *y = x² - 9*



Fonte: Santos, 2011

Figura 16: Gráfico de $y = x^2 - x + \frac{1}{4}$



Fonte: Santos, 2011

IDENTIFICANDO AS RAÍZES:

Faça o mesmo processo que fizemos para as funções afins (página 9) para identificar as raízes da função quadrática.

2.3 Hora de Praticar

1. Esboce o gráfico das funções abaixo e identifique suas imagens:

a) $y = -x^2 + 2x - 1$

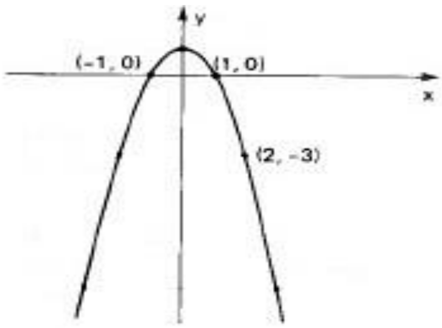
b) $y = x^2$

c) $y = -4x^2 + 2x$

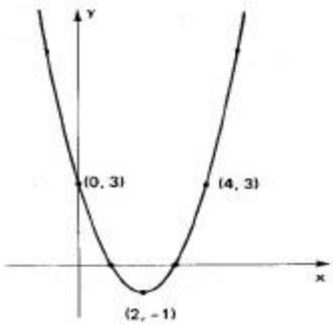
d) $y = 5x^2 - x + 1$

2. Dado cada gráfico abaixo determine a função que o define repetitivamente.

a)



b)



3. RESOLVENDO SISTEMAS DE EQUAÇÕES COM O GEOGEBRA

Resolver um sistema de equações que envolvem duas equações com duas incógnitas consiste em encontrar os valores dessas incógnitas que satisfazem simultaneamente as igualdades.

Por exemplo, considerando o sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}$$

temos que os valores de *x* e *y* que satisfazem ao mesmo tempo as duas igualdades são, respectivamente, *3* e *5*. De fato,

$$x + y = 3 + 5 = 8$$

e

$$3x + y = 3.3 + 5 = 9 + 5 = 14$$

Algebricamente esta solução pode ser encontrada pelo método de tentativas, onde diversos valores para x para y são verificados até que encontre a solução, este muito exaustivo, pelo método da substituição ou o método da adição.

Graficamente, a solução de um sistema de equações pode ser obtida pela intersecção dos gráficos das funções envolvidas no sistema. A coordenadas (x, y) do pondo de intersecção destes gráficos representa os valores que, substituídos nas incógnitas correspondentes das equações, representa a sua solução.

A partir de agora apresentaremos como resolver graficamente um sistema de equações fazendo uso do GeoGebra.

Exemplo 5: Fazendo uso de representações gráficas, resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 3x + y = 14 \end{cases}.$$

A primeira coisa a fazer é escrever cada uma das equações do sistema em função de *x*, ou seja, isolar a incógnita *y* no primeiro membro. Desta forma temos,

$$x + y = 8 \Rightarrow y = -x + 8 \text{ (i)}$$

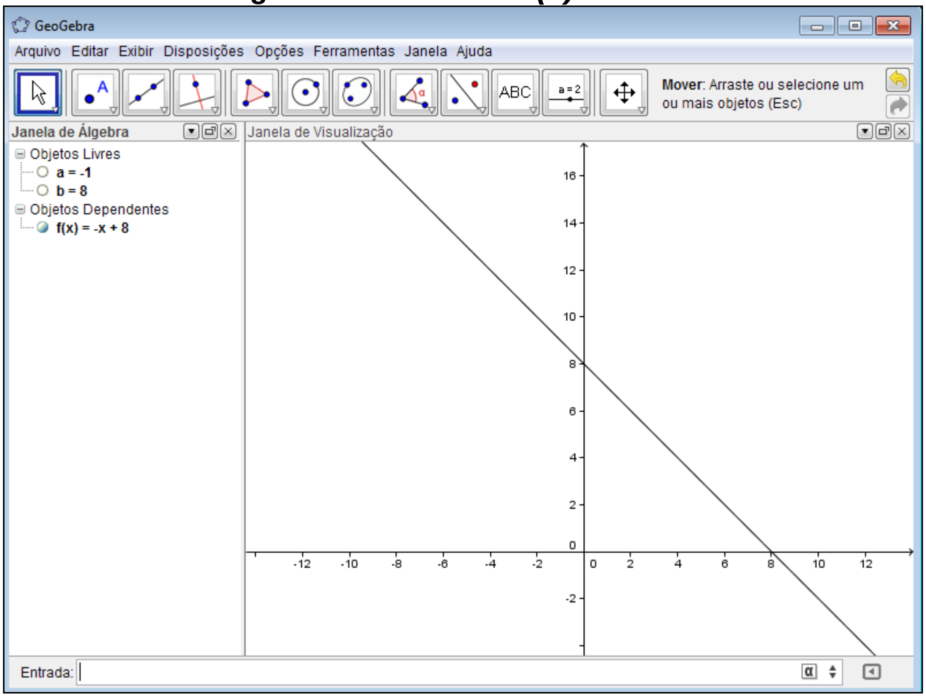
e

$$3x + y = 14 \Rightarrow y = -3x + 14 \text{ (ii).}$$

Tomando *y = f(x)* na sentença (i) e *y = g(x)* na sentença (ii), basta agora usar os passos tomados na seção 2.2 para esboçar o gráfico de cada uma delas no GeoGebra.

Primeiro esboce o gráfico da função *f(x) = - x + 8.* (Figura 17)

Figura 17: Gráfico de *f(x)* = - *x* + *8*

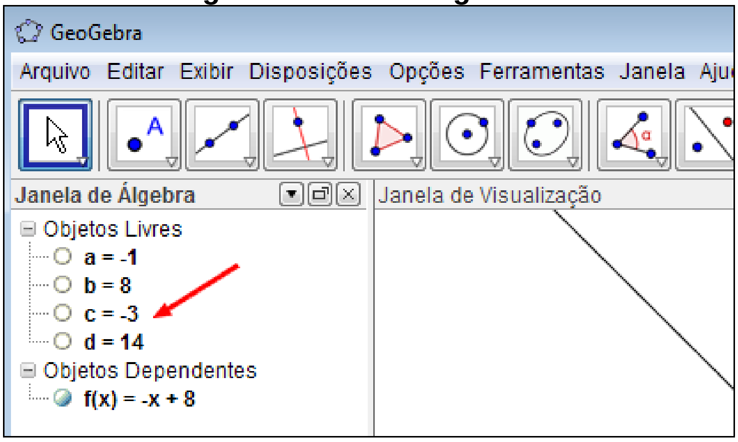


Fonte: Santos, 2011

Para esboçar o gráfico da função *g(x)* = - *3x* + *14* no mesmo plano cartesiano da janela do GeoGebra em que está o gráfico da função *f(x),* precisaremos definir novos coeficientes.

No **Campo de Entrada** digite “c = - 3” (sem aspas) e dê um ENTER. Em seguida, digite “d = 14” e novamente dê um ENTER. Note que estes valores aparecem na **Janela Algébrica** logo abaixo dos coeficientes da função f(f). Estes *c* e *d* são os coeficientes da função g(x).

Figura 18: Janela Algébrica

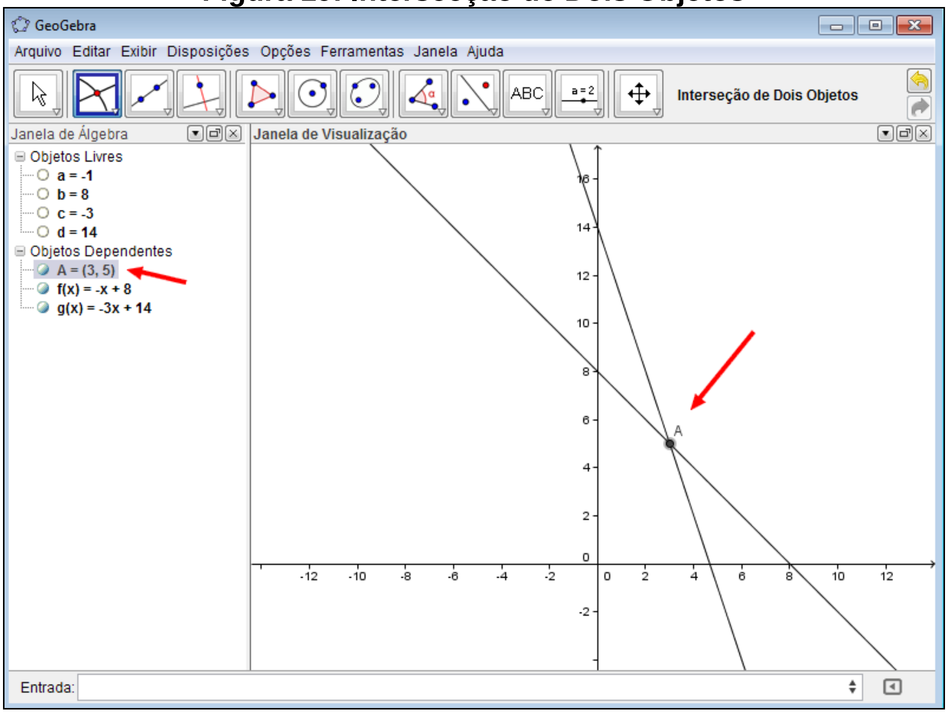


Fonte: Santos, 2011

Digite no **Campo de Entrada** “g(x) = c*x + d” (sem aspas) e aperte na tecla ENTER. Feito! Os gráficos das funções que fazem parte do sistema estão esboçados.

Agora basta identificar o ponto em que acontece a interseção destes gráficos. Neste caso retornaremos ao método exposto na página 8. Mas, uma vez selecionada a opção **Intersecção de Dois Objetos** no GeoGebra, os objetos que iremos clicar são os gráficos de *f* e *g*.

Figura 19: Intersecção de Dois Objetos



Fonte: Santos, 2011

3.1 Hora de Praticar

1. Com o auxilio do GeoGebra resolva cada um dos sistemas a baixo:

a) $\begin{cases} x + 2y = 18 \\ 3x - 4y = 14 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x - 5y = 15 \end{cases}$.

c) $\begin{cases} x^2 + 2y = 4 \\ -x + 3y = 2 \end{cases}$.

* * *

REFERÊNCIAS

BONJORNO, J. R.; AYRTON, O. **Matemática**: fazendo a diferença: 7ª série do ensino fundametal. São Paulo: FTD, 2006.

DANTE, L. R. **Tudo é matemática**: 8ª série do ensino fundamental. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos da matemática elementar**: conjuntos e funções. 3. ed. São Paulo: Atual, 1977.

LONGEN, A. **Matemática**: uma atividade humana: ensino médio. Curitiba: Base, 2003. v. 1.

SANTOS, V. D. G. et al. **Apostila do cursinho comunitário Conexões de Saberes**: matemática. Maceió, 2004. v. 1.

VIVIERO, T. C. N. G.; CORRÊA, M. L. P.. **Minimanual compacto de matemática**: teoria e prática. ensino médio. São Paulo: Rideel, 1999.