2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIENCIAS E MATEMÁTICA – PPGECIM

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A APRENDIZAGEM DO ESBOÇO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUE DIFEREM DE OUTRAS POR UMA COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS OU HOMOTETIAS

ANAYARA GOMES DOS SANTOS

MACEIÓ - AL

ANAYARA GOMES DOS SANTOS

O GEOGEBRA COMO RECURSO DIDÁTICO PARA A APRENDIZAGEM DO ESBOÇO DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUE DIFEREM DE OUTRAS POR UMA COMPOSIÇÃO DE ISOMETRIAS OU HOMOTETIAS

Produto educacional apresentado à banca examinadora do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Alagoas como exigência parcial para a obtenção do título de mestra, sob orientação do professor Dr. Ediel Azevedo Guerra.

Maceió – AL
2013

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta proposta de Produto Educacional, intitulada "O GeoGebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias" é composta por dez oficinas de aprendizagem. O objetivo é apresentar uma sequência didática para o ensino-aprendizagem dos efeitos de certas transformações geométricas de isometria e de homotetia sobre certas funções com auxílio do GeoGebra.

Interessei-me em desenvolver essa sequência didática ao perceber em uma experiência recente como professora Substituta da Universidade Federal de Alagoas – UFAL que os estudantes ainda chegam na universidade com uma grande dificuldade no esboço de gráficos de função>

Foi utilizado como recurso didático um software, o GeoGebra. Software matemático gratuito, que pode ser trabalhados em turmas de qualquer nível de ensino, bastando para isso apenas alguma intimidade com computadores. O software pode ser instalado em qualquer computador, sem dificuldades.

Para adquiri-lo basta entrar no site oficial do GeoGebra (http://www.geogebra.org/cms/) podendo ser copiado, distribuído e transmitido a outros para fins não comerciais.

Caso o leitor não queira baixar a versão, ele ainda pode usar a versão on-line, bastando apenas acessar o link: http://www.geogebra.org/webstart/geogebra.html. Se, porventura, o estudante não possuir conexão com a internet em sua casa, ele ainda poderá baixar devido uma licença off-line que o software possui para distribuição.

A instalação também pode ser efetuada instantaneamente se o sistema operacional for: Windows, Mac OS X, Linux, Unix; XO – one laptop per child. Aqui a versão on-line, isto é, a utilização do software sem a necessidade de instalação pode ser feita apenas nos três primeiros sistemas operacionais citados acima.

A página inicial do site oficial do GeoGebra disponibiliza também um material introdutório de como usar o software no link http://www.geogebra.org/cms/pt_BR.

Para a fundamentação teórica da sequência didática, composta por dez oficinas de aprendizagem, contamos com a Engenharia Didática, a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau e a Teoria dos Registros Semióticos de Raymond Duval.

As atividades que compõem as oficinas encontram-se divididas em etapas. Estas foram feitas de tal modo que seguissem as situações de aprendizagem formuladas por Guy Brousseau. A situação de *ação* é aquela na qual o estudante aceita o desafio proposto na problematização e se empenha na busca de solução do problema. De *formulação,* o aluno já faz algumas afirmações relativas ao problema, mas sem intenção de julgamento sobre validade embora contenha implicitamente intenções de validação. De *validação,* aqui se elabora um tipo de ”prova” (explicação) do que se afirmou em meio a uma linguagem oral ou escrita. E, por fim, *institucionalização,* situação na qual o professor formaliza conceitos e estratégias esboçados nas situações anteriores e faz um trabalho complementar de explorar novos aspectos dos conteúdos abordados. A institucionalização está prevista nas atividades como a nossa ultima etapa de cada atividade.

A sequência didática está assim distribuída. Na oficina I, oficina de Reconhecimento, é explicado a utilidade das ferramentas pertencentes ao GeoGebra, destacando mais as que utilizaremos nas oficinas subsequentes. Nas oficinas II e III, são tratados os casos das translações verticais e horizontais de funções, respectivamente. A oficina IV é destinada a uma abordagem conjunta dos tópicos abordados nas oficinas II e III, visando acentuar as diferenças entre os dois casos. Por outro lado, as oficinas V e VI tratam das homotetias verticais e horizontais de funções, respectivamente. A oficina VII foi proposta com um objetivo análogo ao da oficina IV, ou seja, para em uma abordagem comparativa trazer à tona as diferenças entre as dilatações vertical e horizontal. Na oficina VIII é abordado o caso das reflexões verticais das funções. E, por fim, as oficinas IX e X tratam dos casos das composições envolvendo translações verticais, dilatações, translações horizontais ou dilatações.

Inicialmente, neste produto educacional, encontra-se o Guia de Perguntas para os Estudantes, no qual estão as oficinas a serem propostas aos estudantes pelo professor no laboratório de informática. Em seguida, encontram-se orientações para a aplicação das oficinas pelo professor.

GUIA DE PERGUNTAS PARA OS ESTUDANTES

OFICINA I: RECONHECIMENTO

APRESENTAÇÃO DO GEOGEBRA PELO COORDENADOR DA OFICINA.

OFICINA II: TRANSLAÇÕES VERTICAIS DE FUNÇÕES

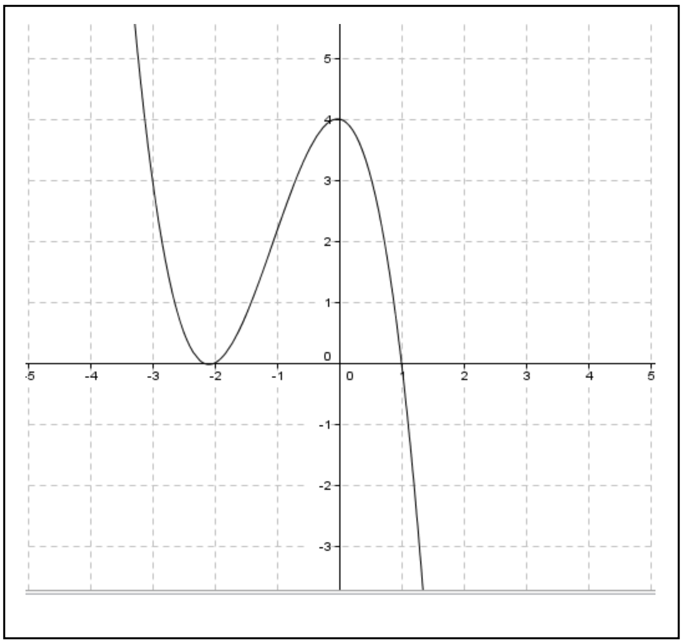
Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

1) Esboce o gráfico das funções $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$, com $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}\ \mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$, $\boldsymbol{g(x) = sen(x) + 1}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen(x) - 2}$ com $\boldsymbol{x \epsilon (0, 2\pi)}$. Qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$?
2) Esboce o gráfico das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, $\boldsymbol{g(x) = x^2 + 3}$ e $\boldsymbol{h(x) = x^2 - 5}$, para $\boldsymbol{x \epsilon [-2, 2]}$ e em seguida responda quais relações existem entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$?
3) Esboce o gráfico das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ onde $\boldsymbol{f(x) = |x|}$, $\boldsymbol{g(x) = |x| + 2}$ e $\boldsymbol{h(x) = |x| - 4}$ para $\boldsymbol{x \epsilon [-3, 3]}$. Qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$?

Encontre a solução do problema a seguir utilizando apenas lápis e papel:

4) Dada à função $\boldsymbol{f}$ como desenhada abaixo, obtenha as funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ onde $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ quando $\boldsymbol{g(x) = f(x) + a}$ e $\boldsymbol{h(x) = f(x) - b}$, com $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{b > 0}$. (sugestão: tome $\boldsymbol{a = 2}$ e $\boldsymbol{b = 1}$).

Figura 1: Gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013

OFICINA III: TRANSLAÇÕES HORIZONTAIS DE FUNÇÕES

Com o auxílio do GeoGebra, encontre a solução das questões a seguir:

1) Responda:

Problema I: Investigue o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = sen\,(x + a)}$ nas seguintes situações:

a) Quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0, $\boldsymbol{\pi}$];

b) Quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [- π, 0]

c) O que observa no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Problema II: Qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$, $\boldsymbol{g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$ e $\boldsymbol{h(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$ com $\boldsymbol{x \epsilon\ (0, 2\pi)}$?

2) Responda:

Problema I: Investigue o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = (x + a)^2}$ nas seguintes situações:

a) Quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0, 2];

b) Quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [- 2, 0].

c) O que observa no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Problema II: Esboce o gráfico das funções $\boldsymbol{f, g, h}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, $\boldsymbol{g(x) = (x + 2)^2}$ e $\boldsymbol{h(x) = (x - 5)^2}$ para $\boldsymbol{x \epsilon}$ $\mathbb{R}$ e em seguida responda quais relações existem entre esses gráficos.

3) Responda:

Problema I: investigue o gráfico da função $\boldsymbol{f(x) = |x + a|}$ nas seguintes situações:

a) Quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0,2];

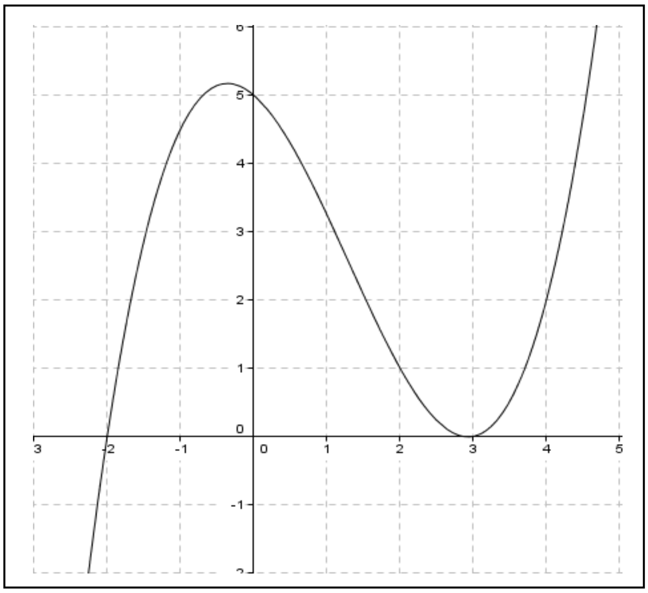
b) Quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [-2,0] e digam o que observam no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Problema II: Esboce o gráfico das funções $\boldsymbol{f, g, h}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$, $\boldsymbol{g(x) = |x + 3|}$ e $\boldsymbol{h(x) = |x - 4|}$ e em seguida diga qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{h}$?

Encontre a solução do problema a seguir utilizando apenas lápis e papel:

4) Dada à função $\boldsymbol{f}$ como desenhada abaixo, obtenha as funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ com $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{g(x) = f(x + a)}$ e $\boldsymbol{h(x) = f(x - b)}$. (sugestão: tome $\boldsymbol{a = 4}$ e $\boldsymbol{b = -3}$).

Figura 2: O gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA IV: SÍNTESE DO ESBOÇO DE GRÁFICOS COM O AUXÍLIO DAS TRANSLAÇÕES DE FUNÇÕES.

A atividade a seguir deve ser realizada sem o auxílio do GeoGebra.

1) Responda:

Problema I: Com base nos resultados vistos até aqui, em que difere a translação horizontal da translação vertical?

Problema II: considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{2}$. Esboce o gráfico da função $\boldsymbol{g}$, sem fazer contas, sabendo apenas o gráfico de $\boldsymbol{f}$.

Problema III: dadas as funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}\ (\boldsymbol{x})$ e $g(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}})$ esboce o gráfico de $\boldsymbol{g}$ sem fazer contas, sabendo apenas o gráfico de $\boldsymbol{f}$.

OFICINA V: HOMOTETIAS VERTICAIS DE FUNÇÕES.

Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

1) Considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$ e $\boldsymbol{g(x) = a\, sen(x)}$ onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ e $\boldsymbol{x \in} [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$. Responda qual a relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$:

a) Quando $\boldsymbol{a}$ assume valores maiores do que 1 (faça o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar entre 1 e 3, por exemplo);

b) Quando $\boldsymbol{a}$ assume valores entre 0 e 1. (quando $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, o que acontece?).

2) Considere a função $\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{g(x) = ax}^2$ onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ e $\boldsymbol{x \in} \mathbb{R}$. Responda qual a relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$:

a) Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;

b) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

3) Considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x)} = |\boldsymbol{x}|$ e $\boldsymbol{g(x) = a}|\boldsymbol{x}|$ onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ e $\boldsymbol{x \in} \mathbb{R}$. Responda qual a relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$:

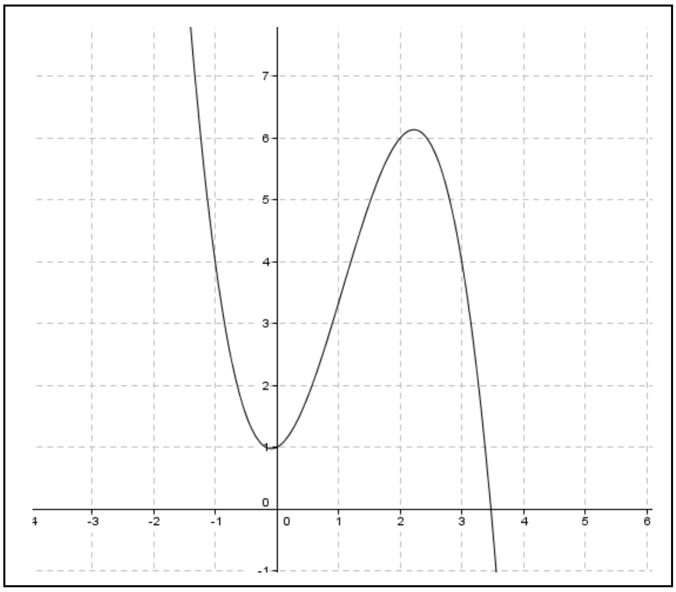
a) Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;

b) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

A atividade a seguir deve ser realizada sem o auxílio do geogebra.

4) Dada à função $\boldsymbol{f}$ como desenhada abaixo, obtenha as funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ com $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$:$\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{g(x) = af(x)}$ e $\boldsymbol{h(x) = bf(x)}$ onde $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{1}$ e $\mathbf{0} < \boldsymbol{b} < \mathbf{1}$ (sugestão: tome $\boldsymbol{a} = \mathbf{2}$ e $\boldsymbol{b} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$).

Figura 3: Gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA VI: HOMOTETIA HORIZONTAL DE FUNÇÕES

Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

1) Considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{ax})$ onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ e $\boldsymbol{x} \,\boldsymbol{\epsilon}\, [\mathbf{0}, \mathbf{2}\boldsymbol{\pi}]$. Qual relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$:

a)Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;

b) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

2) Considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{ax})^2$ onde a é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{5})$ e $\boldsymbol{x} \,\boldsymbol{\epsilon}$ $\mathbb{R}$. Qual relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$:

a)Para $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{1}$ (sugestão: $\boldsymbol{a}$ varie no intervalo [1, 3]);

b) Para $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}.$ (sugestão: faça o parâmetro a variar no intervalo (0, 1)).

3) Considere duas funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}|$ onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e varia num intervalo $(\mathbf{0}, \mathbf{3})$ e $\boldsymbol{x} \boldsymbol{\epsilon}$ $\mathbb{R}$. Como pode ser obtido o gráfico de $\boldsymbol{g}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$, nas seguintes situações:

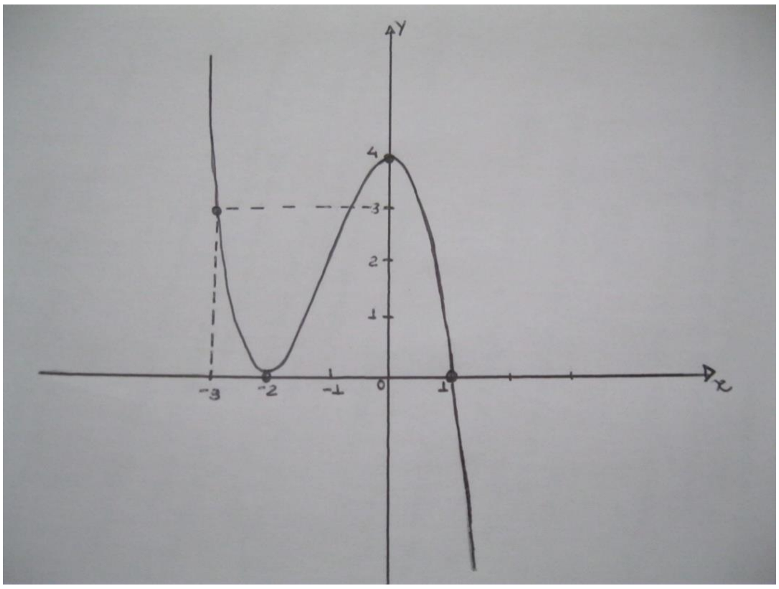
a)Para $\boldsymbol{a} \geq \mathbf{1}$.

b) Para $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}.$

A atividade a seguir deve ser realizada sem o auxílio do GeoGebra.

4) Dada à função $\boldsymbol{f}$ como desenhada abaixo, obtenha as funções $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$ com $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por g$(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\mathbf{2}\boldsymbol{x})$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}\left(\frac{x}{2}\right)$.

Figura 4: Gráfico da função $\boldsymbol{f}$.



Fonte: Santos, 2013

OFICINA VII: SÍNTESE DO ESBOÇO DE GRÁFICOS QUE DIFEREM POR HOMOTETIAS.

A atividade a seguir deve ser realizada sem o auxílio do GeoGebra.

1) Responda:

Problema I: Com base nos resultados vistos até aqui o que difere a homotetia vertical da homotetia horizontal?

Problema II: Quais as relações entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e de $\boldsymbol{g}$ nas situações seguintes:

a) Quando $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, onde $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}_+$

b) Quando $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x})$, onde $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}_+$.

OFICINA VIII: REFLEXÕES VERTICAIS DE GRÁFICOS DE FUNÇÕES

Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

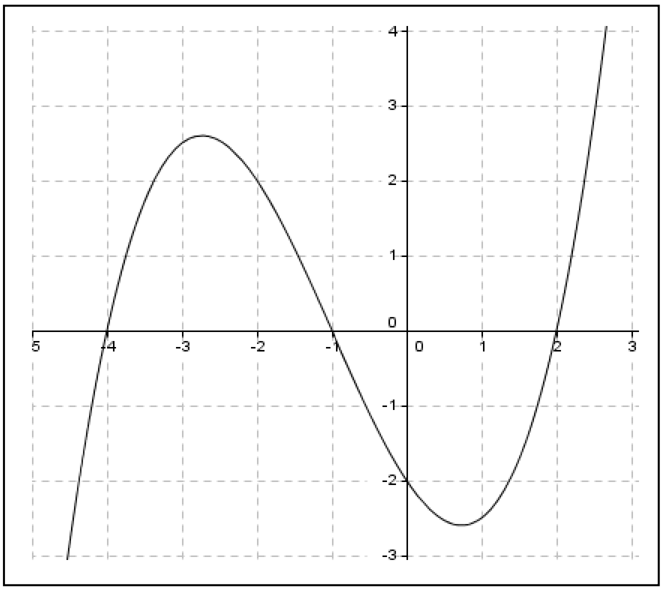
1) Esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{2}}$ para $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}$ e em seguida diga qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$.

2) Esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$ e $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = -|\boldsymbol{x}|$ para $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ [-\boldsymbol{3}, \boldsymbol{3}]$ e em seguida diga qual a relação existente entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$

A atividade a seguir deve ser realizada sem o auxílio do GeoGebra.

3) Dada à função $\boldsymbol{f}$ como desenhada abaixo, obtenha o gráfico da função $\boldsymbol{g}$ com $\boldsymbol{g}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mathrm{g}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Em seguida responda que relação existe entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$.

Figura 5: Gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA IX: COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES VERTICAIS E DILATAÇÕES.

Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

1) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$, $\boldsymbol{g(x) = 2\ sen(x) + 3}$ e $\boldsymbol{h(x) = 3\ sen(x) - 5}$ com $\boldsymbol{x \epsilon [0, 2\pi]}$. Responda como se obtém o gráfico de $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{h}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$?

2) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$, $\boldsymbol{g(x) = 3x^2 + 2}$ e $\boldsymbol{h(x) = 2x^2 - 1}$, $\boldsymbol{x \epsilon [-3, 3]}$. Responda como se obtém o gráfico de $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{h}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$?

3) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$, $\boldsymbol{g(x) = 2|x| + 3}$ e $\boldsymbol{h(x) = \frac{1}{2}|x| - 5}$, $\boldsymbol{x \epsilon [-3, 3]}$. Responda como se obtém o gráfico de $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{h}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$?

OFICINA X: COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES HORIZONTAIS E DILATAÇÕES.

Com o auxílio do GeoGebra, responda as questões a seguir:

1) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\ \boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{4}}\right)$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}\ \boldsymbol{sen}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right)$, $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ [-\mathbf{4\pi}, \mathbf{4}\boldsymbol{\pi}]$. Responda como se obtém o gráfico de $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{h}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$?

2) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^2$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}(\boldsymbol{x} + \mathbf{3})^2$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{3}(\boldsymbol{x} - \mathbf{5})^2$. Responda como se obtém o gráfico de $\boldsymbol{g}$ e de $\boldsymbol{h}$ a partir do gráfico de $\boldsymbol{f}$?

3) Em uma mesma tela, esboce os gráficos das funções $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|$, $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} + \mathbf{3}|$ e $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}|\boldsymbol{x} - \mathbf{5}|$, onde $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e $\boldsymbol{x}\ \boldsymbol{\epsilon}\ \mathbb{R}$. Verifique o que acontece quando varia o valor de “a”, nos casos:

a)Para $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$. (sugestão: faça o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar no intervalo [1, 3]).

b) Para $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$. (sugestão: faça o parâmetro variar no intervalo (0, 1))

ORIENTAÇÕES PARA A APLICAÇÃO DAS OFICINAS

OFICINA I: RECONHECIMENTO

OBJETIVO: Apresentar aos estudantes o software GeoGebra mostrando suas ferramentas com o auxílio da função afim $f(x) = ax + b$, como conteúdo para se traçar gráficos e fazer a verificação de seu comportamento no plano cartesiano.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

ATIVIDADE 1: Mostrar a tela inicial do GeoGebra, nomeando cada ferramenta adequadamente.

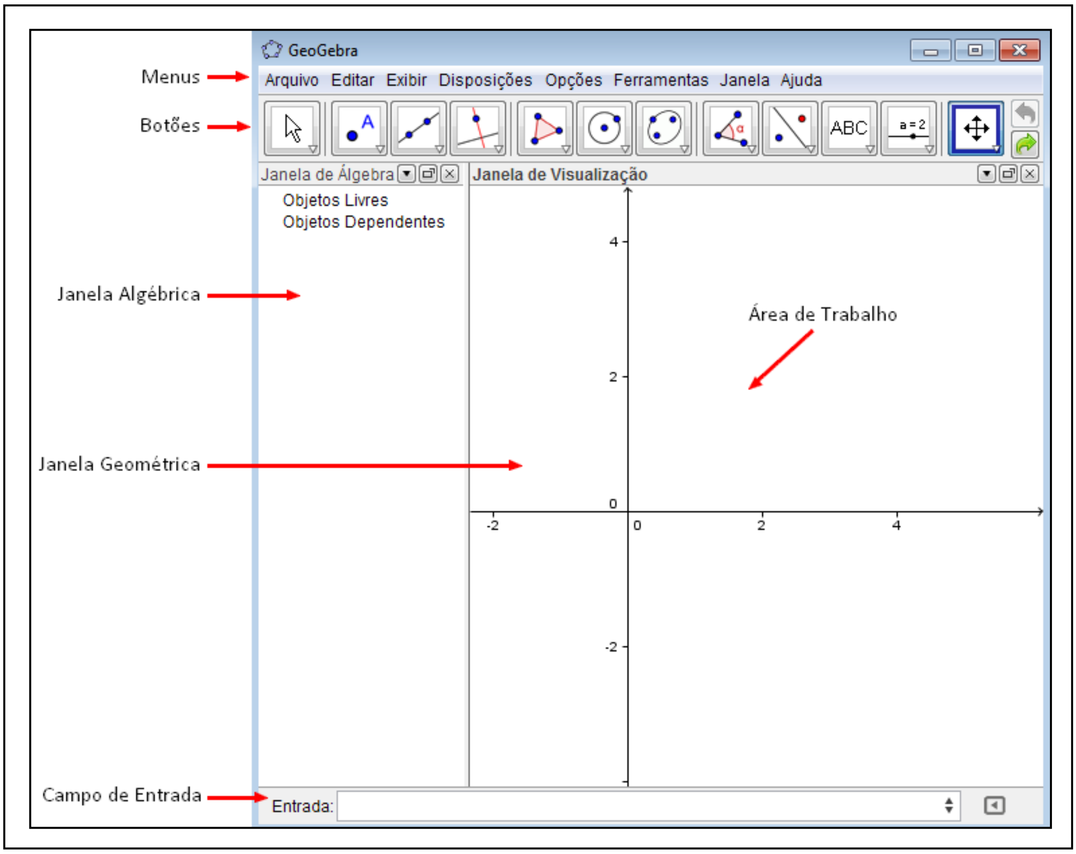
TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos

Etapa I: Apresentação.

Ao iniciar o programa GeoGebra, nos deparamos com uma janela algébrica, janela geométrica e uma barra de ferramentas, como pode ser visto na figura abaixo.

A barra de ferramentas é composta por: Arquivo, Editar, Exibir, Disposições, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda, além de um conjunto de botões que compõem as ferramentas básicas do software.

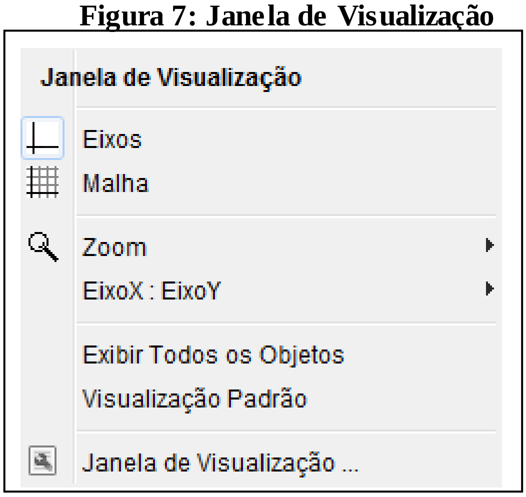
Figura 6: Tela inicial do GeoGebra



Fonte: Santos, 2012

Ao clicar no botão direito do mouse na área de trabalho, abrirá uma pequena janela de configuração, a chamada Janela de Visualização, com os seguintes comandos, como mostrado na figura abaixo.

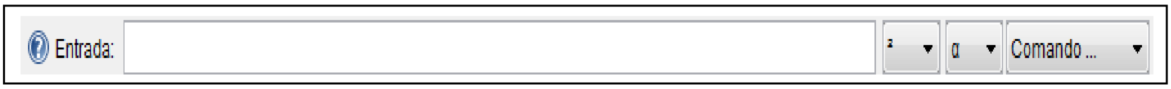
Figura 7: Janela de Visualização



Fonte: Santos, 2012

O Campo de Entrada fica no rodapé do GeoGebra, é através dele que se torna possível operar usando comandos escritos. No Campo de Entrada, podemos dizer exatamente onde o ponto aparecerá, basta digitar as coordenadas deste ponto.

Figura 8: Campo de entrada



Fonte: Santos, 2012

O interpretador de funções deste programa foi projetado para reconhecer a maior parte das operações e funções elementares. Essas operações e funções são introduzidas pelo usuário por meio da caixa de entrada. A seguir apresentamos referências a operações e funções para o GeoGebra.

Tabela 1: Operações Elementares

Operações Elementares		
GeoGebra	**Descrição**	**Expressão Matemática**
a+b	Soma entre os valores de a e b	a + b
a-b	Diferença entre os valores de a e b	a - b
a*b	Multiplicação entre os valores de a e b	a . b
a/b	Divisão entre os valores de a e b	a : b
a^b	Potência de a elevado a b	a^b

Fonte: Santos, 2012

Tabela 2: Constante

Constante		
GeoGebra	**Descrição**	**Expressão Matemática**
pi	Valor 3,141592654...	π

Fonte: Santos, 2012

Tabela 3: Funções Elementares

Funções Elementares		
GeoGebra	**Descrição**	**Expressão Matemática**
abs(x)	Valor absoluto de x	$\|x\|$
sqrt(x)	Raiz de x	$\sqrt{x}$
sin(x)	Seno de x	sen x
função[x^2,a,b]	Função potência pertencente a um intervalo	$x^2; x \in (a, b)$

Fonte: Apostila do Novos Talentos – UFAL

Mais operações, funções e comandos matemáticos do GeoGebra podem ser obtidos nas caixas localizadas do lado direito da caixa de entrada.

Figura 9: Constantes

Fonte: Santos, 2012

Etapa II: Construção

Nesta etapa reservamos um tempo para que os estudantes comecem a mexer e a discutir com seus colegas de trios o funcionamento do mesmo. Esperamos que eles lancem funções na caixa de entrada para ver o comportamento do seu gráfico. Acreditamos assim que estariam a fixar o tipo de gráfico para cada função, ou seja, perceberiam que dada uma função afim, seu gráfico será sempre uma reta, assim como o gráfico de uma função quadrática será sempre uma parábola.

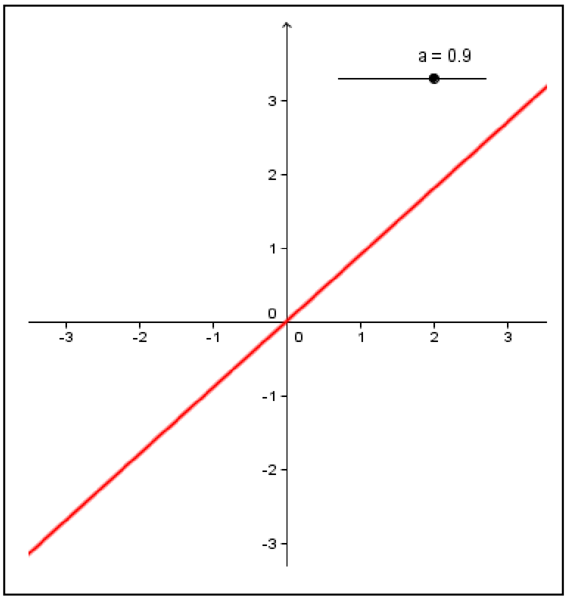
ATIVIDADE 2: Esboçar o gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$, na forma $\boldsymbol{f(x) = ax}$, com $\boldsymbol{a \neq 0}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos

Etapa I: Construção

O professor pede aos estudantes que esbocem com o auxílio do GeoGebra a função $f(x) = ax$.

Figura 10: Gráfico da função linear



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Construção

O coordenador da oficina pede aos trios de estudantes que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor");
- Definam o intervalo de variação do parâmetro "a";
  (caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f sugerir o intervalo $(-3,3)$);
- Escrevam a função f no campo de entrada, neste caso: $f(x) = ax$;
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Etapa III: Problematização

O professor pede aos trios de estudantes que investiguem o gráfico da função $f(x) = ax$ nas seguintes situações:

i) Quando o parâmetro x varia de uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é um intervalo do tipo $(0,3)$;

ii) Quando o parâmetro x varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo (-3,0);

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios de estudantes que apresentem suas respostas, confrontando-as e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes.

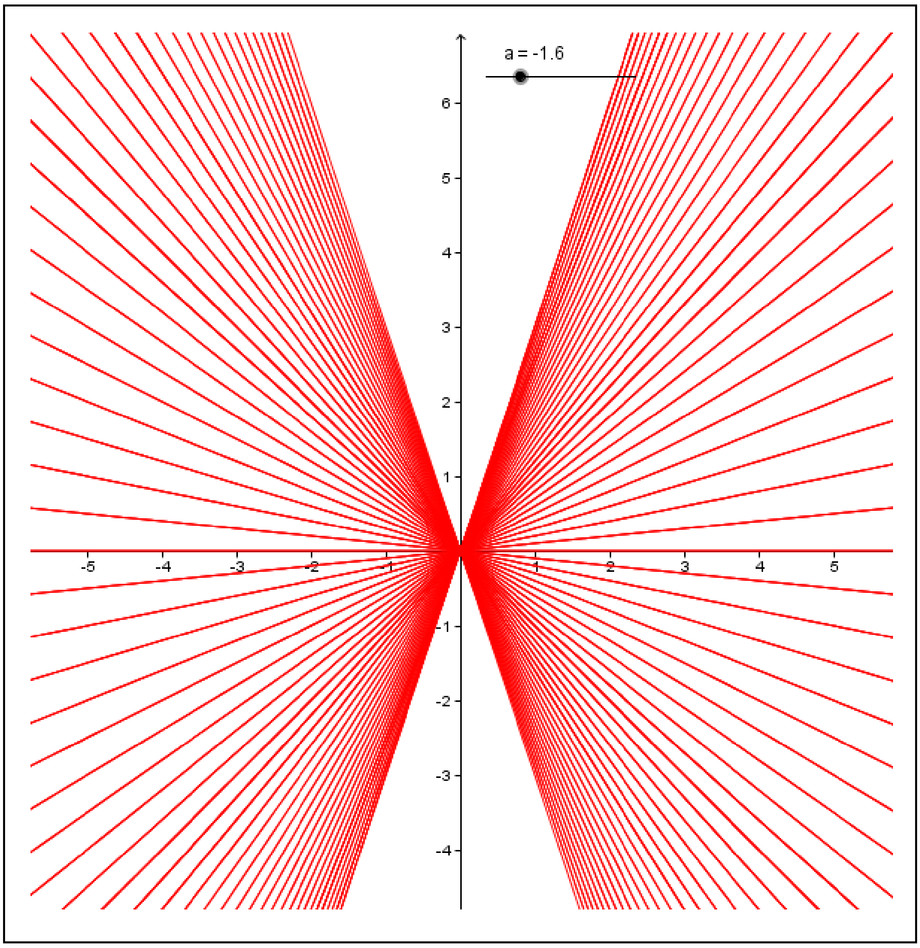
Etapa V: Institucionalização

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Espera-se que os estudantes concluam que

- A função linear é um tipo particular da função afim, por seu termo independente de x ser igual a zero.
- Quando tomamos valores menores que zero temos uma reta decrescente e que se tomarmos valores maiores que zero o resultado é uma reta crescente e que o ponto de interseção ocorre em (0,0).

Figura 11: Gráfico da função Linear com animação



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA II: TRANSLAÇÕES VERTICAIS DE FUNÇÕES

OBJETIVO: Perceber a relação entre os gráficos de duas funções f e g quando $g(x) = f(x) + a$.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

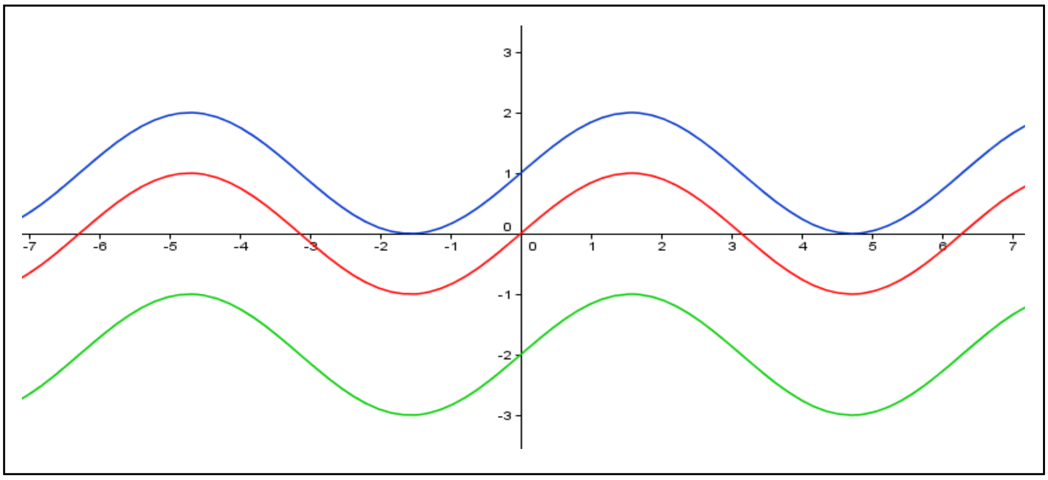
ATIVIDADE 1: Translações verticais da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos

Etapa I: Construção

O coordenador da oficina pede aos estudantes que esbocem com o auxílio do GeoGebra os gráficos as funções f, g e h, onde $f, g, h: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ estão definidas por $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(x) + 1$ e $h(x) = sen(x) - 2$ com $x \in (0{,}2\pi)$, pintando seus respectivos gráficos com cores distintas.

Figura 12 - Representação geométrica das funções $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$.



Fonte: Santos, 2013.

O gráfico de f corresponde ao gráfico de cor vermelha. Por outro lado o gráfico de g está ilustrado com a cor azul e por fim o gráfico de h é o gráfico de cor verde.

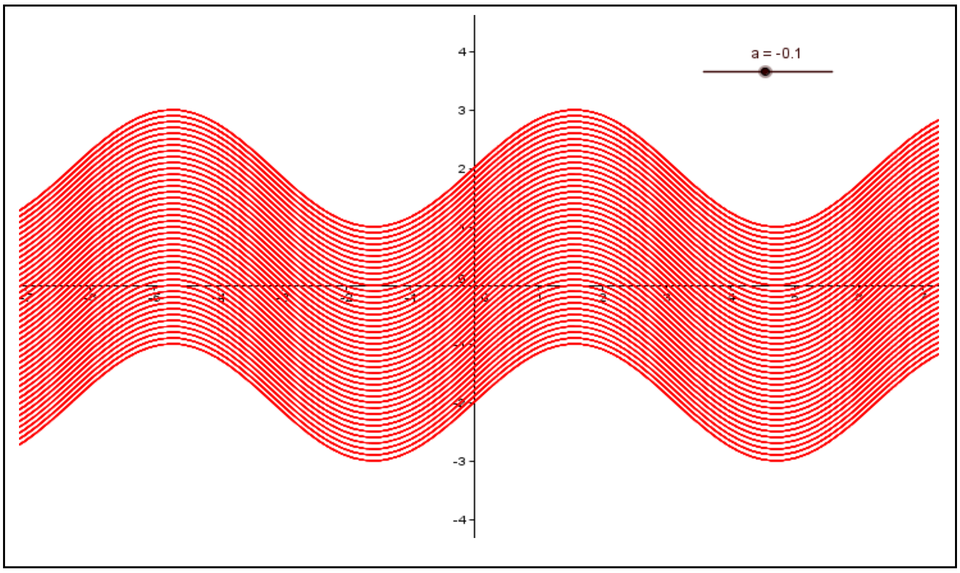
Neste momento da construção o coordenador da oficina apresenta a ferramenta "controle deslizante" também conhecida como "seletor" do GeoGebra. Nesta fase, começará a ser feito um jogo de teste no comportamento das funções. O objetivo é que eles percebam suas variações.

Etapa II: Construção

O coordenador da oficina pede aos trios de estudantes que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor");
- Definam o intervalo de variação da constante "a";
  (caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-2,1)$);
- Escrevam a função f no campo de entrada, neste caso: $f(x) = sen(x) + a$;
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Figura 13 - Representação geométrica da função f com efeitos de animação.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa III: Problematização

O coordenador da oficina pergunta aos trios de estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g e de f e h. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas.

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

a) O gráfico de g é o gráfico de f transladado verticalmente por 1 unidade para cima.
b) O gráfico de h é o gráfico de f transladado verticalmente por 2 unidades para baixo.

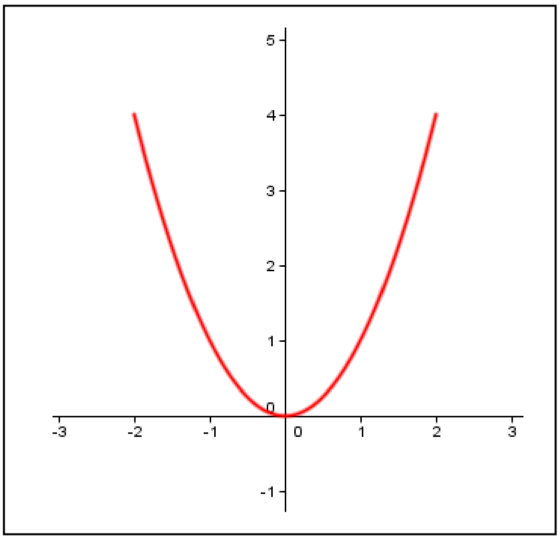
ATIVIDADE 2: Translações verticais da função $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos

Etapa I: Construção

O professor pede aos trios de estudantes que esbocem com o auxílio do GeoGebra o gráfico da função $f(x) = x^2$ com $x \in [-2,2]$.

Figura 14 – O gráfico da função $\boldsymbol{f}$

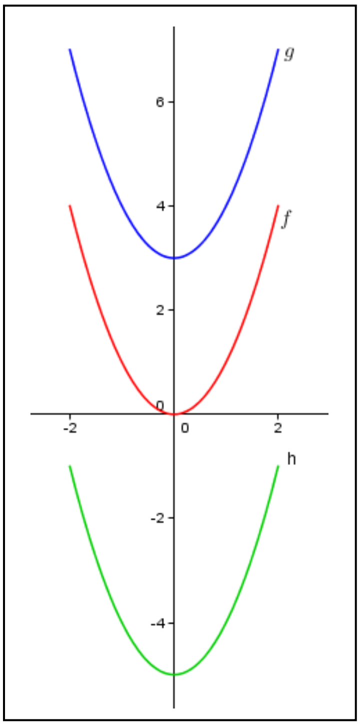


Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Construção

O professor pede para que os trios de estudantes esbocem com o auxílio do GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 3$ e $h(x) = x^2 - 5$, para $x \epsilon [-2,2]$, pintando-os com cores diferentes.

Figura 15 - Representação geométrica das funções f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

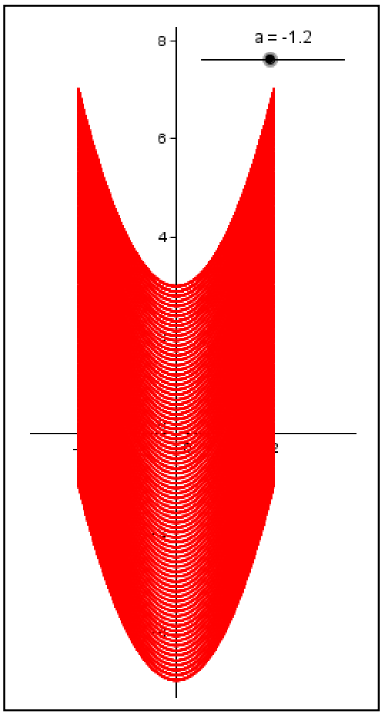
Etapa III: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor");
- Definam o intervalo de variação da constante "a";
  (Caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-5,3)$);
- Escrevam a função f no campo de entrada, nesse caso: $f(x) = x^2$;

- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Figura 16 - Representação geométrica da função *f* com efeitos de animação



Fonte: Santos, 2013.

Etapa IV: Problematização.

Pergunta-se aos trios de estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g e de f e h. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa V: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VI: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

i) O gráfico de g é o gráfico de f transladado verticalmente por 3 unidades para cima.
ii) O gráfico de h é o gráfico de f transladado verticalmente por 5 unidades para baixo.

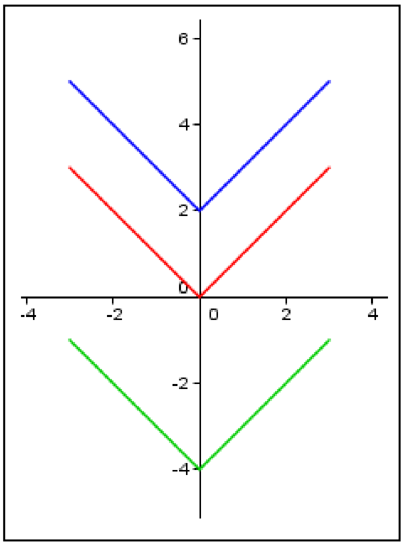
ATIVIDADE 3: Translações Verticais da função $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}$: $\rightarrow$ $\mathbb{R}$, definida por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 min.

Etapa I: Construção.

O professor pede para que os estudantes esbocem com o auxílio do GeoGebra as funções $f, g, h: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ onde $f(x) = |x|$, $g(x) = |x| + 2$ e $h(x) = |x| - 4$ para $x \epsilon [-3,3]$. Em seguida, pinte os gráficos com cores distintas.

Figura 17 – Representação geométrica das funções f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

O gráfico de f corresponde ao gráfico de cor vermelha. Por outro lado o gráfico de g está ilustrado com a cor azul e por fim o gráfico de h é o gráfico de cor verde.

Neste momento da construção é apresentada a ferramenta "controle deslizante" também conhecida como "seletor" do GeoGebra. Nesta fase, começará a ser feito um jogo de teste no comportamento das funções. O objetivo é que eles percebam suas variações.

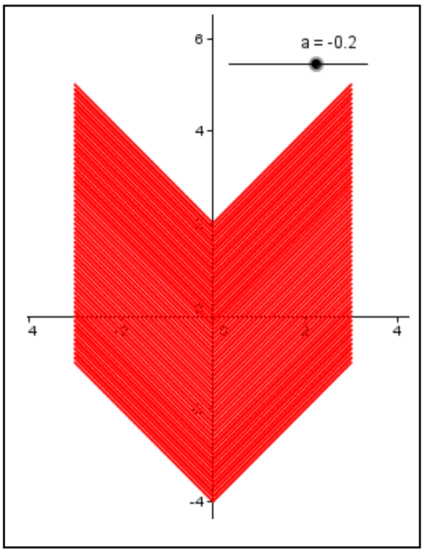
Etapa II: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes para que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor").
- Definam o intervalo de variação da constante "a";
  (caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-4,2)$).

- Escrevam a função f no campo de entrada, nesse caso: $f(x) = |x|$;
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Figura 18 - Representação geométrica da função f com efeitos de animação.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa III: Problematização

Pergunta-se aos estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g e de f e h. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

a) O gráfico de g é a translação vertical do gráfico de f por 2 unidades para cima.
b) O gráfico de h é a translação vertical do gráfico de f por 4 unidades para baixo.

ATIVIDADE 4: A relação entre os gráficos de $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$, quando $\boldsymbol{g(x) = f(x) + a}$ e $\boldsymbol{h(x) = f(x) - b}$, onde $\boldsymbol{a > 0}$ e $\boldsymbol{b > 0}$.

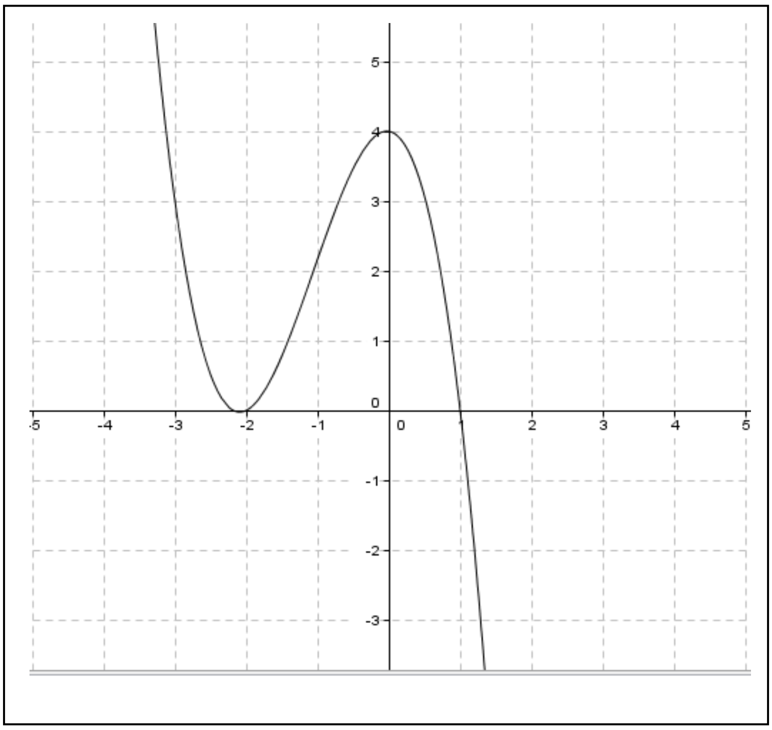
TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos

Esta atividade deverá ser realizada sem o recurso do Software GeoGebra, isto é, a solução deve ser encontrada utilizando apenas papel e lápis.

Etapa I: Construção.

O professor entrega a cada trio de estudante em um papel quadriculado o gráfico de uma função f abstrata conforme a figura seguinte:

Figura 19 - Gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Problematização

Solicita que cada trio de estudantes escolha um valor para a e b.

- Se necessário o professor sugere $a = 2$ e $b = 1$.

Etapa III: Socialização e validação das respostas

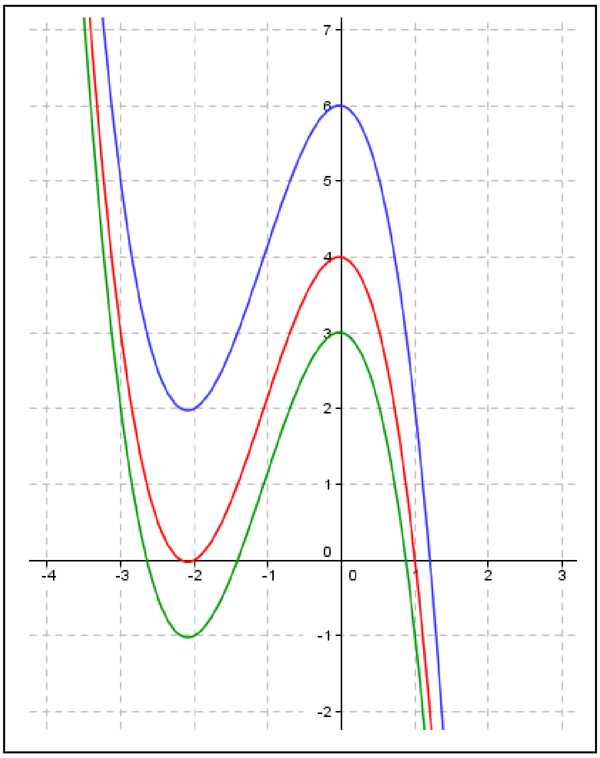
O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa IV: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Esboço dos casos nos quais $g(x) = f(x) + 2$ e $h(x) = f(x) - 1$. Em seguida verificar a construção no GeoGebra.

Figura 20 – Gráfico da função f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

Nos gráficos acima, o gráfico da função f está pintado na cor vermelha; o gráfico de g na cor azul e o gráfico de h na cor verde.

OFICINA III: TRANSLAÇÕES HORIZONTAIS DE FUNÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre os gráficos das funções f, g e h quando $g(x) = f(x + a)$ e $h(x) = f(x + b)$.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

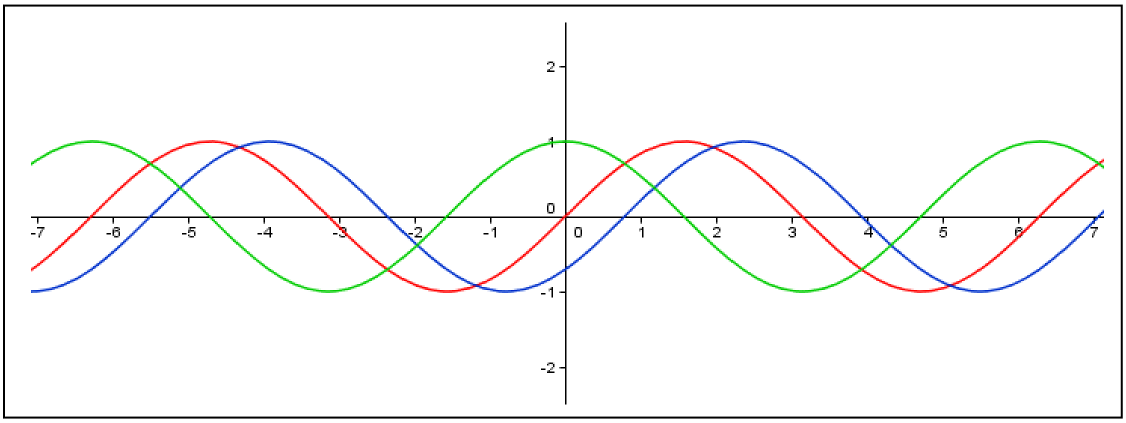
ATIVIDADE 1: Translações horizontais da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos.

Etapa I: Construção

O professor pede para que os trios de estudantes esboçem com o auxílio do GeoGebra as funções $f, g, h: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ com $x \epsilon\ (0,2\pi)$. Pinte-as com cores distintas.

Figura 21 – As curvas $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{h}$.



Fonte: Santos, 2013.

O gráfico da função de cor vermelha é o gráfico de f, assim como a de cor azul é o gráfico da função g e a de cor verde é o gráfico da função h, como segue abaixo.

Etapa II: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes para que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor").
- Definam o intervalo de variação da constante "a"
  (caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-7,7)$).
- Escrevam a função f no campo de entrada, nesse caso: $f(x) = sen(x + a)$.
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Etapa III: Problematização

O professor pede para que os estudantes investiguem o gráfico da função $f(x) = sen\ (x + a)$ nas seguintes situações:

a) quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0, π];
b) quando o parâmetro a varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [- π, 0]
c) e digam o que observam no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

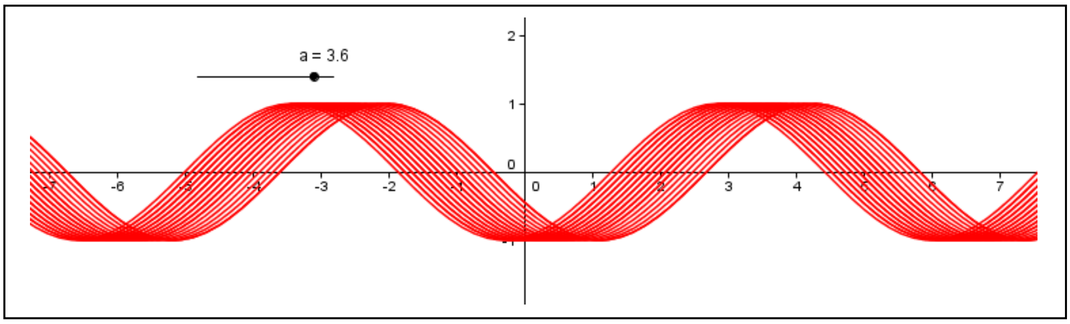
O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

O objetivo nesta etapa é formalizar o fato de que a função $f(x) = sen(x)$ ao somar valores positivos ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para esquerda. Analogamente, se somarmos um valor negativo ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para direita. Ver ilustração seguinte com animação.

Figura 22 - Representação geométrica da função f com efeitos de animação.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa VI: Problematização.

O professor, nesta etapa, pergunta aos estudantes que relação existe entre os gráficos de $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ com $x \epsilon\ (0{,}2\pi)$.

Etapa VII: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VIII: Institucionalização.

Mostrar tabela com valores convenientes escolhidos para ajudar a entender esses efeitos.

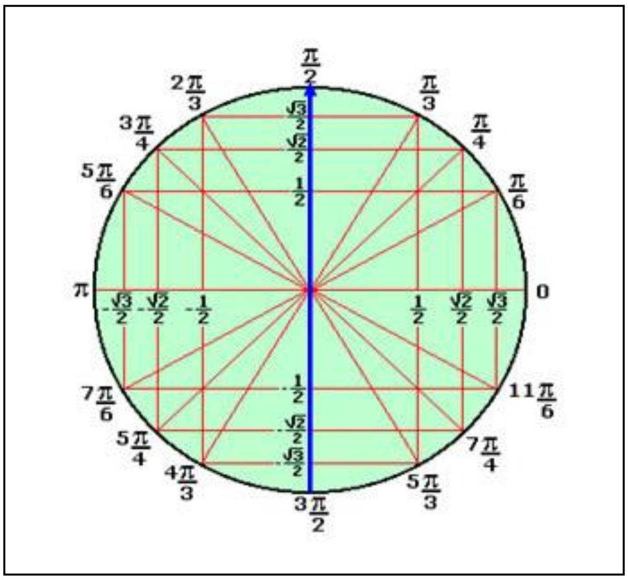
Tabela 4 : Valores mostrados na figura 16.

$sen\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$	$x-\frac{\pi}{4}$	x	x	$x+\frac{\pi}{2}$	$sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$
0	0	$\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{2}$	1
1	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	0
0	π	$\frac{5\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
-1	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	0

Fonte: Santos, 2013.

Será utilizado, para ilustrar os valores um círculo trigonométrico como segue abaixo, objetivando facilitar o entendimento na construção da tabela.

Figura 23 - Ciclo Trigonométrico



Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/simetria-no-circulo-trigonometrico.htm >[1]

Ainda nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

i) O gráfico de g é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por $\frac{\pi}{4}$ para a esquerda.

ii) O gráfico de h é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por $\frac{\pi}{2}$ para a direita

ATIVIDADE 2: Translações horizontais da função f: $\mathbb{R}$: → $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$.

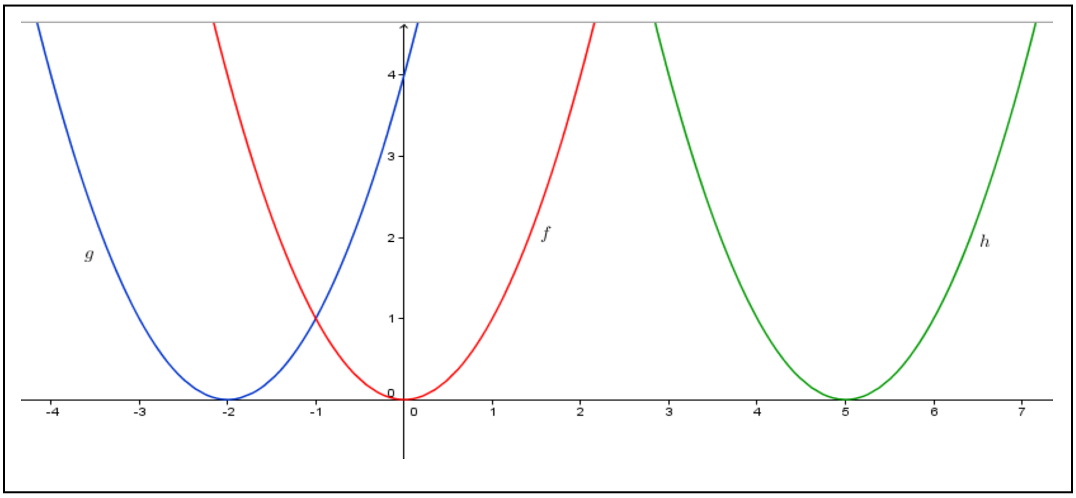
TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção

[1] Acesso em 12 jun 2013.

O professor pede aos trios de estudantes que esbocem com o auxílio do GeoGebra os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+2)^2$ e $h(x) = (x-5)^2$ para $x \in \mathbb{R}$. Em seguida, peça para que pinte os gráficos com cores distintas.

Figura 24 - Gráfico da função f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

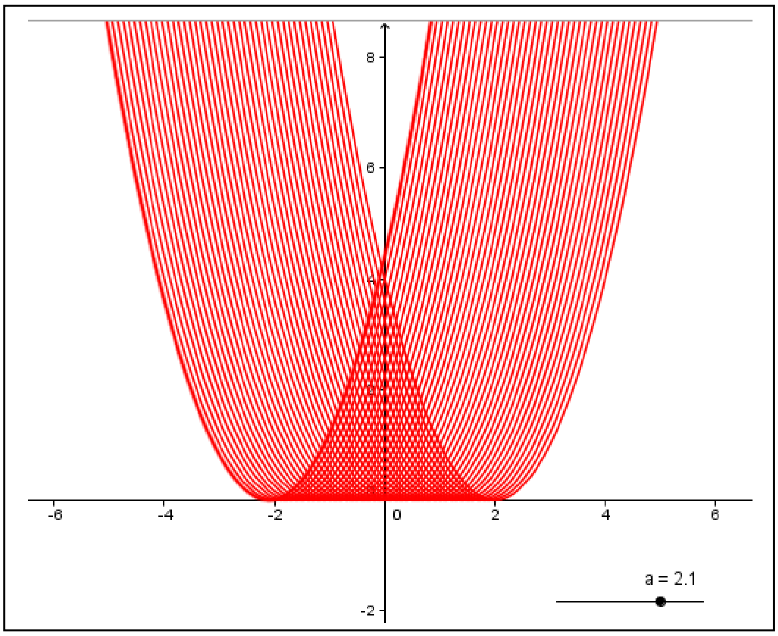
Etapa II: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor");
- Definam o intervalo de variação da constante "a";
- Caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-2{,}5)$.
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";

- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Figura 25 - Representação geométrica da função f com efeitos de animação



Fonte: Santos, 2013.

Etapa III: Problematização

O professor pede para que os estudantes investiguem o gráfico da função $f(x) = (x + a)^2$ nas seguintes situações:

a) quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0, 2];

b) quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [- 2, 0]

c) e digam o que observam no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Espera-se que os estudantes concluam o fato de que dada a função $f(x) = x^2$ ao se somar valores positivos ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para esquerda. Analogamente, se somarmos um valor negativo ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para direita. Ver, Figura 20 com animação. O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VI: Problematização

O professor pergunta quais as relações que existem entre os gráficos de $f(x) = x^2$, $g(x) = (x + 2)^2$ e $h(x) = (x - 5)^2$.

Etapa VII: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VIII: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

a) O gráfico de g é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por 2 unidades para a esquerda.
b) O gráfico de h é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por 5 unidades para a direita.

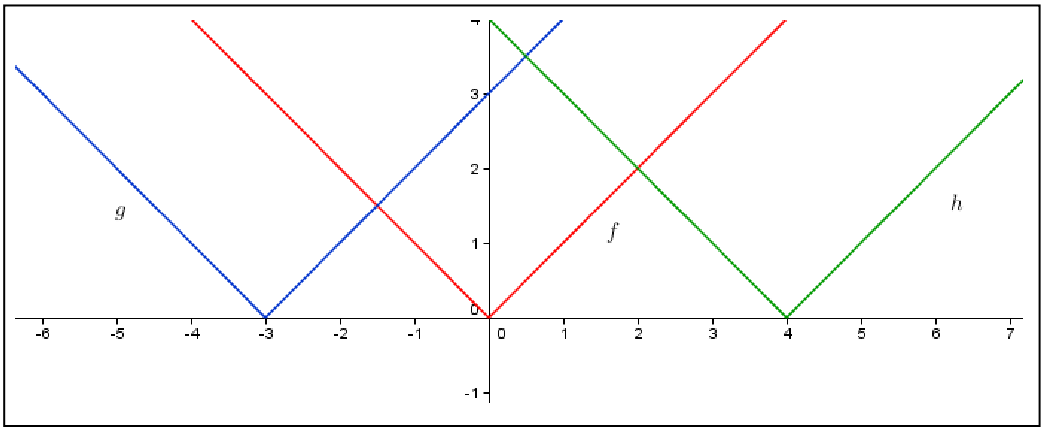
ATIVIDADE 3: Translações horizontais do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes que esbocem com o auxílio do GeoGebra os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = |x + 3|$ e $h(x) = |x - 4|$. Em seguida pinte-as com cores distintas como segue abaixo.

Figura 26 – Os gráficos das funções $\boldsymbol{f, g}$ e $\boldsymbol{h}$.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Construção.

O professor pede aos trios de estudantes que:

- Busquem nas ferramentas o "controle deslizante" (dependendo da versão do GeoGebra equivale a "seletor").
- Definam o intervalo de variação da constante "a".
- Caso os estudantes tenham tomado um intervalo que não fique visível o comportamento das funções f, g e h sugerir o intervalo $(-3,4)$.
- Escrevam a função f no campo de entrada, nesse caso: $f(x) = |x + a|$.
- Em seguida comecem a variar o controle deslizante e veja o comportamento do gráfico da função;
- Para uma melhor visualização, cliquem em Editar/Propriedades e selecionem os efeitos de animação. Na Janela de Álgebra, no lado esquerdo da tela, selecione (clicando encima) o número (controle deslizante) e na ferramenta "Básico" selecione "Animar";
- Ainda na Janela de Álgebra, selecione "Função" e na ferramenta "Básico", selecione "Exibir rastro". Aqui, é possível ainda colorir o rastro (selecionando "cor").

Etapa III: Problematização.

O professor pede para que os estudantes investiguem o gráfico da função $f(x) = |x + a|$ nas seguintes situações:

a) quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores positivos do zero, isto é, num intervalo do tipo [0,2];

b) quando o parâmetro $\boldsymbol{a}$ varia em uma vizinhança de valores negativos do zero, isto é, num intervalo do tipo [-2,0] e digam o que observam no tocante ao movimento do gráfico da função dada.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

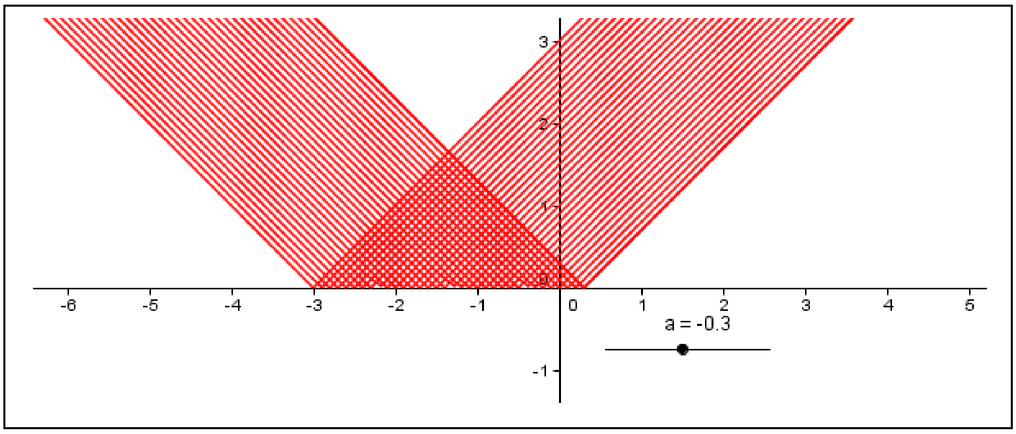
O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Espera-se que os estudantes concluam o fato de que dada a função $f(x) = |x|$ ao somar valores positivos ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para esquerda. Analogamente, se somarmos um valor negativo ao parâmetro x o resultado será uma translação horizontal para direita. Ver ilustração seguinte com animação.

Figura 27 - Representação geométrica da função f com efeitos de animação.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa VI: Problematização.

Pergunta-se quais as relações existentes entre os gráficos de f e g e de f e h. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa VII: Socialização e validação das respostas.

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VIII: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Respostas esperadas:

a) O gráfico de g é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por 3 unidades para a esquerda.
b) O gráfico de h é igual ao gráfico de f transladado horizontalmente por 4 unidades para a direita.

ATIVIDADE 4: Qual a relação entre os gráficos das funções f, g e h, quando $g(x) = f(x + a)$ e $h(x) = f(x - b)$.

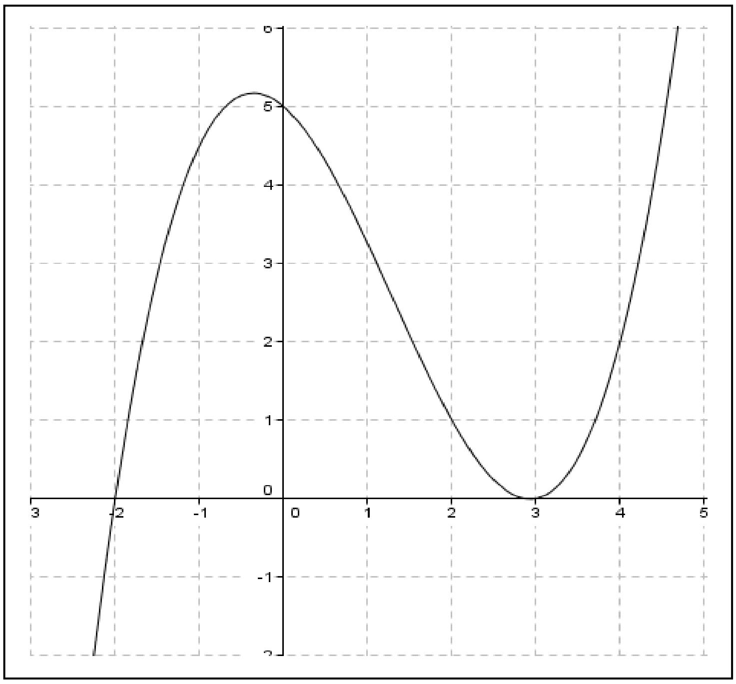
TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Esta atividade deverá ser realizada sem o recurso do Software GeoGebra, isto é, a solução deve ser encontrada utilizado apenas papel e lápis.

Etapa I: Construção.

O professor entrega em um papel quadriculado o gráfico de uma função f abstrata conforme a figura seguinte:

Figura 28 – O gráfico da função f



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Problematização.

O professor solicita a cada trio de estudante que esbocem os gráficos das funções $g(x) = f(x + 4)$ e $h(x) = f(x - 3)$ para $x \in \mathbb{R}$ sem o GeoGebra.

Etapa III: Socialização e validação das respostas.

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa IV: Institucionalização.

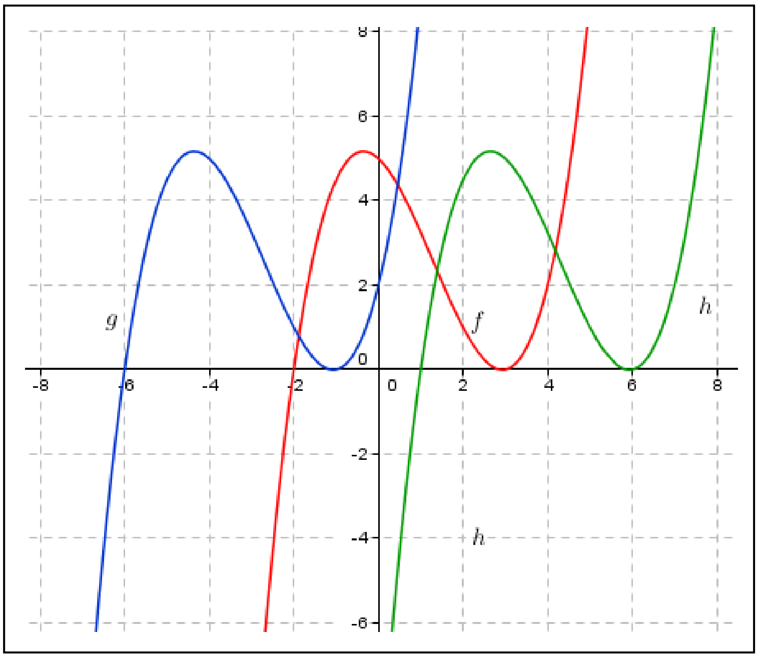
Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Que o gráfico da função *g* é o gráfico da função *f* translado horizontalmente para esquerda por 4 unidades, enquanto o gráfico da função *h* é o gráfico da função *f* transladado horizontalmente para direita por 3 unidades.

Após a socialização das respostas o professor valida as respostas com o esboço dos gráficos na lousa, conforme a Figura 24.

Figura 29 – Representação geométrica das funções

***f* (vermelho), *g* (azul) e *h* (verde)**



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA IV: SÍNTESE DO ESBOÇO DE GRÁFICOS COM O AUXÍLIO DAS TRANSLAÇÕES DE FUNÇÕES.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

ATIVIDADE 1: Com base nos resultados vistos até aqui, o que difere a translação horizontal da translação vertical?

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos cada.

Etapa I: Problematização.

O professor pede aos trios de estudantes que considerem as funções seguintes.

- $f(x) = (x + 4)^2$ estou somando o número 4 à variável;
- $g(x) = x^2 + 4$ estou somando o número 4 à função.

Em seguida, pede aos estudantes que façam, sem o auxílio do GeoGebra, com lápis e papel os esboços dos gráficos dessas funções.

Etapa II: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa III: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de f é uma translação horizontal da função $h(x) = x^2$ enquanto g é uma translação vertical. O professor argumenta que quando somamos uma constante a uma função, deslocamos o gráfico verticalmente. Note que estamos somando um valor às ordenadas de cada um dos pontos do nosso gráfico, e nesse caso, se o valor da constante for positivo o deslocamento vertical estará no sentido positivo do eixo dos y. Por outro lado se o valor da constante for negativo, o deslocamento vertical estará no sentido negativo do eixo dos y. Neste momento, o professor pode fazer desenhos ilustrativos.

Etapa IV: Problematização

O professor pede que os estudantes considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen\,(x)$ e $g(x) = sen(x) - 2$. Propõe que eles esbocem o gráfico da função g, sem fazer contas, sabendo o gráfico de f.

Etapa V: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VI: Institucionalização.

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

O professor pode argumentar que, de fato, o gráfico de g é a translação vertical para baixo por duas unidades do gráfico de f.

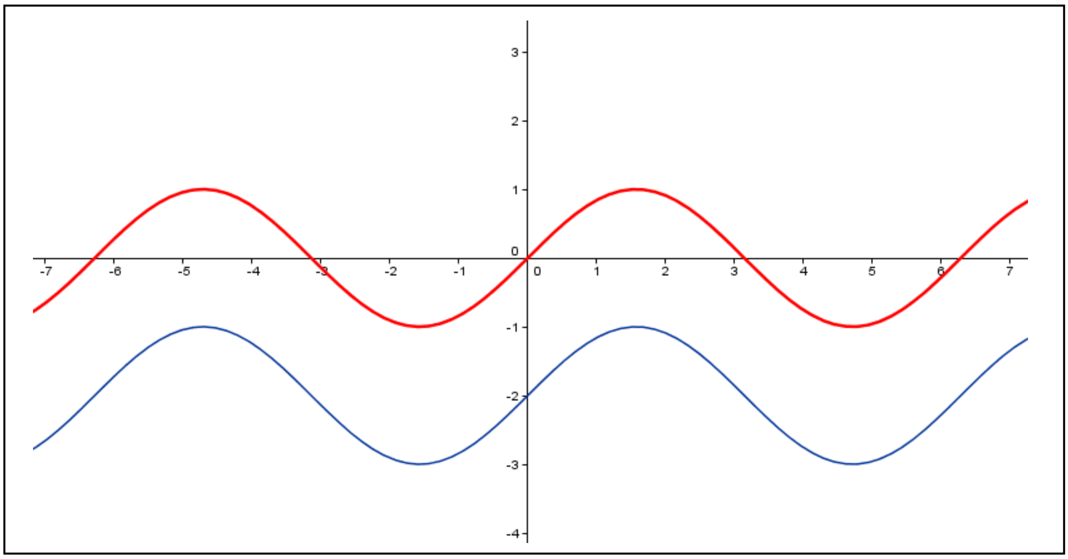
Tabela 5 – Valores atribuídos às funções f e g.

x	$sen(x)$	$senx - 2$
2π	0	- 2
$\frac{\pi}{2}$	1	- 1
π	0	- 2
$\frac{3\pi}{2}$	-1	- 3

Fonte: Santos, 2013.

Observe os gráficos de f e de g na Figura 25 seguinte:

Figura 30 – Os gráficos de f $(vermelho)$ e $g(azul)$.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa VII: Problematização

O professor propõe a questão seguinte: dadas as duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen\ (x)$ e $g(x) = sen(x + \frac{\pi}{2})$ esboce o gráfico de g sem fazer contas ou sem o auxílio do GeoGebra.

Etapa VIII: Socialização e validação das respostas

O professor acompanha observando as tentativas da resolução da questão. Depois pede para que os estudantes socializem suas respostas, pedindo que eles apresentem na lousa as suas conclusões. Em caso de divergência o professor faz a mediação visando à obtenção de um consenso.

Etapa XI: Institucionalização.

Por outro lado quando somamos uma constante à variável independente, deslocamos o seu gráfico horizontalmente. Notamos que, ao somarmos uma constante positiva (negativa) à variável independente da função, o resultado é um movimento para esquerda (direita), isso se dá porque estamos definindo uma nova função, cujo elemento do domínio desta nova função tem a mesma imagem que um elemento do domínio da função original ao subtrair o valor da constante acrescida na função.

Observe a tabela abaixo. Essa tabela foi construída com valores convenientes para ilustrar melhor a Atividade I de Translações horizontais.

Tabela 6: Valores atribuídos a g e g'.

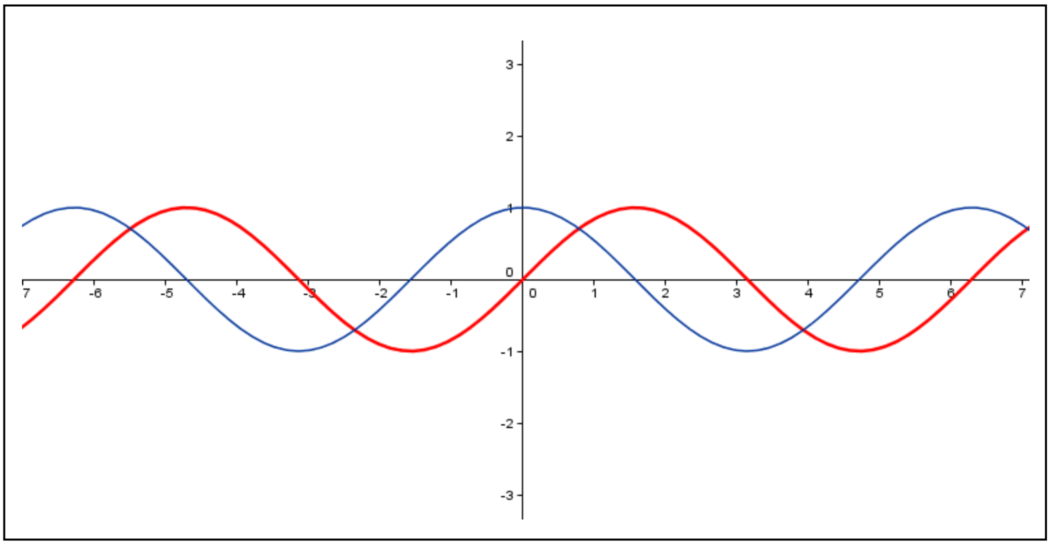
x	$x + \frac{\pi}{2}$	$sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
0	$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{\pi}{2}$	π	0

π	$\frac{3\pi}{2}$	-1
$\frac{3\pi}{2}$	2π	0

Fonte: Santos, 2013.

O professor traça os gráficos de f e g.

Figura 31 – Os gráficos de f e g.



Fonte: Santos, 2013.

O objetivo de modo geral é que os estudantes percebam que depois de analisadas para três funções particulares (trigonométrica, potência e modular) os efeitos não estão restritos apenas a essa função e sim para todas as funções reais.

OFICINA V: HOMOTETIAS VERTICAIS DE FUNÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre os gráficos de duas funções, f e g com $g(x) = af(x)$, onde $\boldsymbol{a}$ é um número real positivo.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

ATIVIDADE 1: Dilatação ou compressão vertical da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

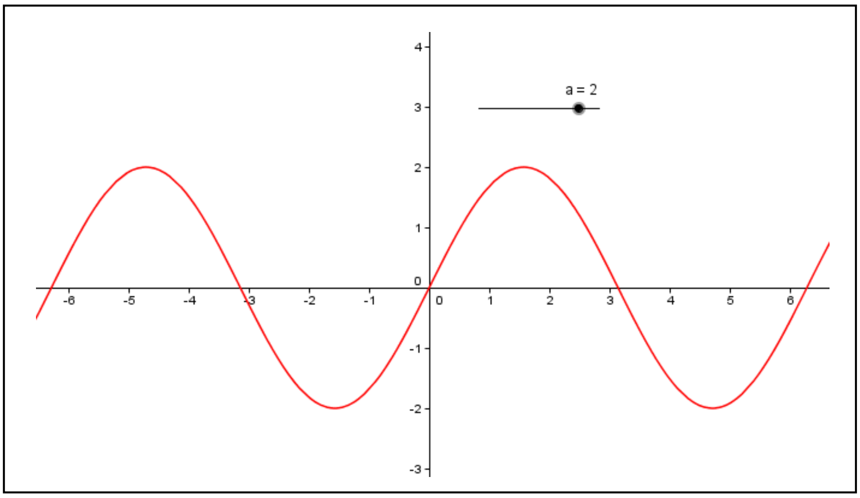
O professor pede para que os trios de estudantes considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = a\ sen(x)$ quando a é um parâmetro e $x \in [0,2\pi]$.

Etapa II: Construção.

Construção a partir do “controle deslizante”.

a) Defina o intervalo para o controle deslizante. Neste caso vamos tomar o intervalo $(-3,3)$;
b) No campo de entrada do GeoGebra, escrever a função $f(x) = a\ sen(x)$;
c) Fazer o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar no intervalo já definido no item a).

Figura 32 – Representação geométrica da função g.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa III: Problematização.

O professor pede para que os estudantes investiguem a relação entre o gráfico de f e g:

i) quando $\boldsymbol{a}$ assume valores maiores do que 1 (faça o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar entre 1 e 3, por exemplo);

ii) quando $\boldsymbol{a}$ assume valores entre 0 e 1. (Quando $\boldsymbol{a} = 0$, o que acontece?)

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

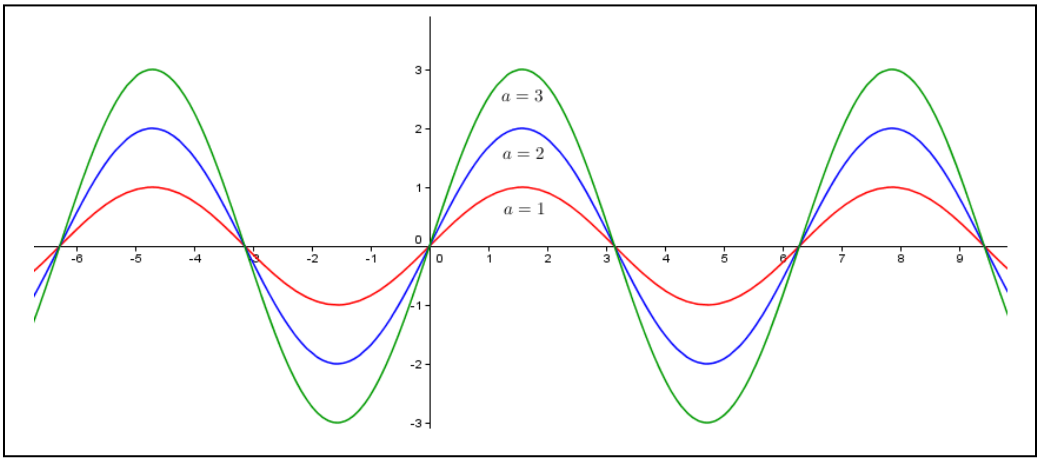
O professor pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa V: Institucionalização,

Nesta etapa, o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

i) Quando fazemos $\boldsymbol{a} > 1$, o gráfico da função g se estica ou dilata verticalmente ou para cima.

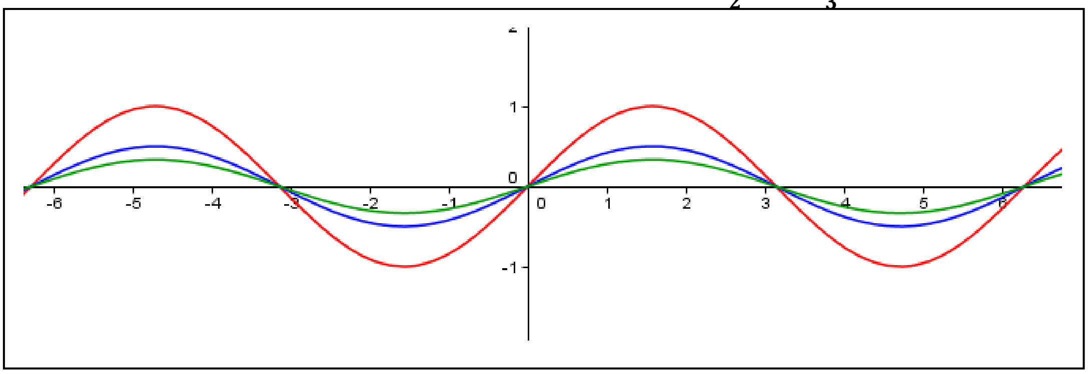
Figura 33 – A representação geométrica de $\boldsymbol{f}$ e $\boldsymbol{g}$.



Fonte: Santos, 2013.

ii) Quando fazemos $0 < \boldsymbol{a} < 1$ o gráfico da função g se achata ou comprime (dilata) verticalmente. Se fizermos o $\boldsymbol{a} = 0$ o gráfico da função g fica exatamente sobre o eixo x.

Figura 34 – Gráficos de $\boldsymbol{f}$ (caso $\boldsymbol{a}$ = 1), de $\boldsymbol{g}$ (casos $\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{a} = \frac{1}{3}$, respectivamente.



Fonte: Santos, 2013.

***Observação**: O gráfico na cor vermelha é o gráfico da função f, por outro lado o que está na cor azul é o gráfico de g quando $a = \frac{1}{2}$ e por fim o gráfico na cor verde é o da função g quando tomamos $a = \frac{1}{3}$.

ATIVIDADE 2: Dilatação ou compressão vertical da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ quando $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

Peça para que os trios de estudantes considerem uma função $g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = ax^2$ quando $\boldsymbol{a}$ é um parâmetro e $x \epsilon\ \mathbb{R}$.

Etapa II: Construção.

Construção a partir do "controle deslizante".

a) Defina o intervalo para o controle deslizante. Neste caso vamos tomar o intervalo $(0,3)$;
b) No campo de entrada do GeoGebra, escrever a função $g(x) = a\,x^2$;
c) Fazer o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar no intervalo já definido no item a).

Etapa III: Problematização.

O professor propõe que os estudantes investiguem o que acontece com o gráfico de g nas seguintes situações:

i) Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;
ii) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa V: Institucionalização.

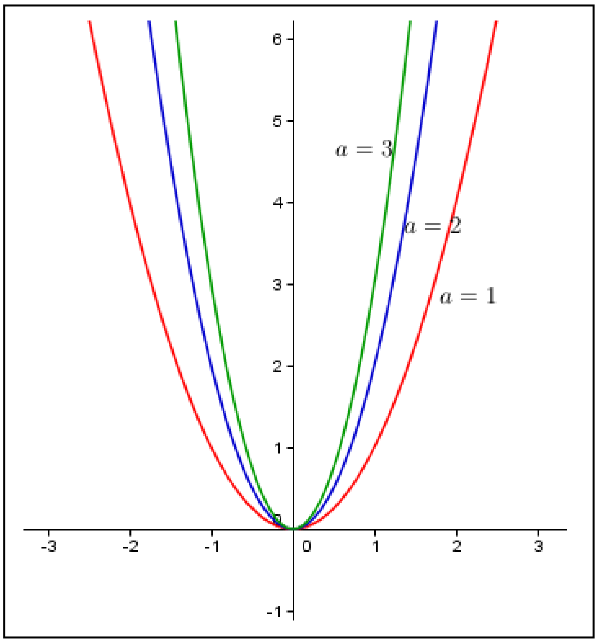
O professor apresenta as respostas esperadas:

Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1 a abertura do gráfico de g diminui;

i) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1 a abertura do gráfico de g aumenta,

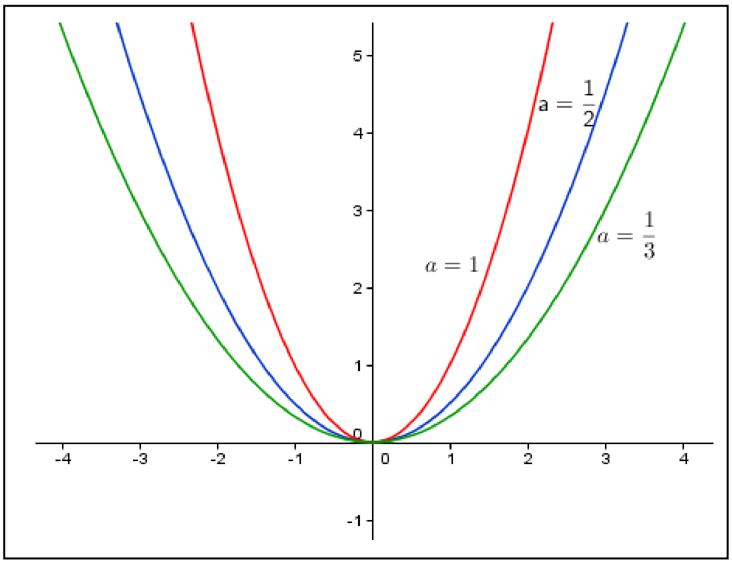
O professor pode mostrar, por exemplo, os gráficos das figuras 24 e 25:

Figura 35 – O gráfico de $\boldsymbol{g}$, quando $\boldsymbol{a = 1}$, $\boldsymbol{a = 2}$ e $\boldsymbol{a = 3}$



Fonte: Santos, 2013.

Figura 36 - O gráfico de g, quando $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{3}$.



Fonte: Santos, 2013.

ATIVIDADE 3: Dilatação ou compressão vertical da função $f: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ quando $f(x) = |x|$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor pede para que os trios de estudantes considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = a|x|$ onde e $x \epsilon \mathbb{R}$.

Etapa II: Construção.

Construção a partir do "controle deslizante".

a) Defina o intervalo para o controle deslizante. Neste caso vamos tomar o intervalo $(0,3)$;
b) No campo de entrada do GeoGebra, escrever a função $g(x) = a|x|$;
c) Fazer o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar no intervalo já definido no item a).

Etapa III: Problematização.

O professor propõe aos estudantes que investiguem o que acontece com o gráfico de g nas seguintes situações:

i) Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;
j) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas.

O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

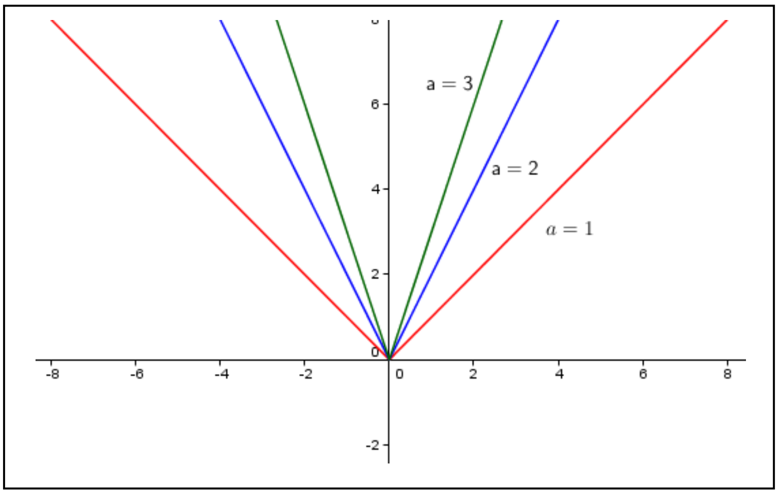
Etapa V: Institucionalização.

O professor apresenta as respostas esperadas:

i) Quando $\boldsymbol{a}$ varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1 a abertura do gráfico de g diminui;
j) Quando $\boldsymbol{a}$ varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1 a abertura do gráfico de g aumenta,

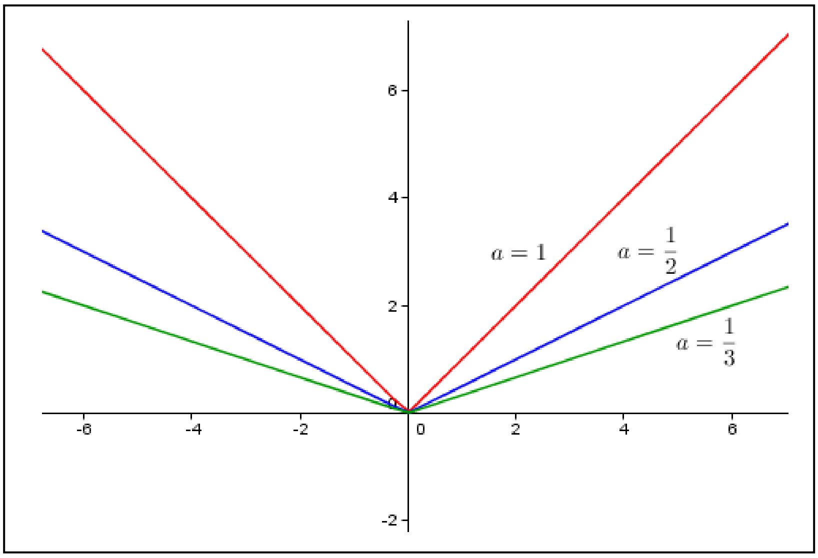
O professor pode mostrar, por exemplo, os gráficos das figuras 26 e 27:

Figura 37 – O gráfico de g, quando $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$



Fonte: Santos, 2013.

Figura 38 - O gráfico de g, quando $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{3}$.



Fonte: Santos, 2013.

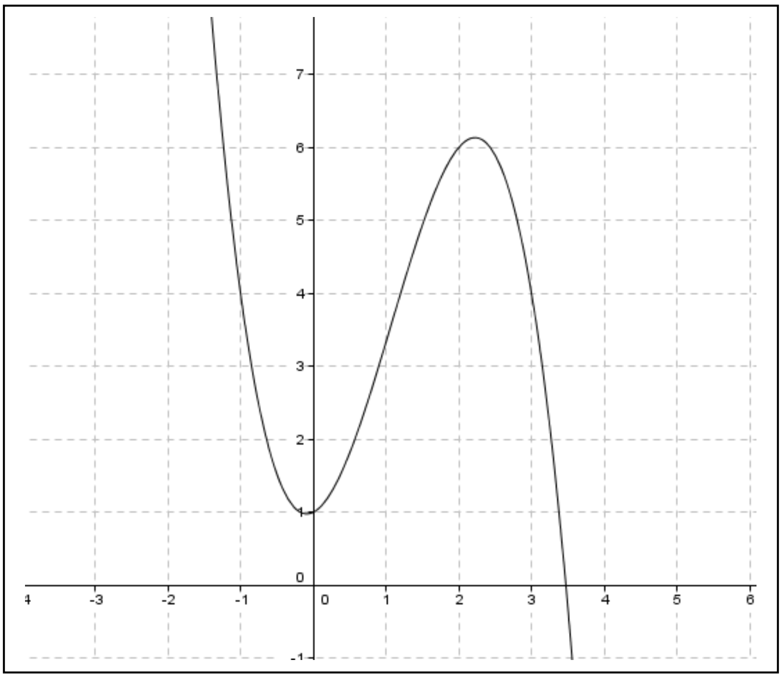
ATIVIDADE 4: Qual a relação entre os gráficos de f, g e h, quando $g(x) = af(x)$ e $h(x) = bf(x)$, onde $a \geq 1$ e $0 < b < 1$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor entrega aos trios de estudantes um papel quadriculado com o desenho do gráfico de uma função f abstrata conforme a figura seguinte.

Figura 39 – Representação geométrica da função $f(x)$.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Problematização.

O professor pede então que os estudantes esbocem sem o GeoGebra os gráficos das funções $g(x) = 2f(x)$ e $h(x) = \frac{1}{2}f(x)$, para $x \in R$.

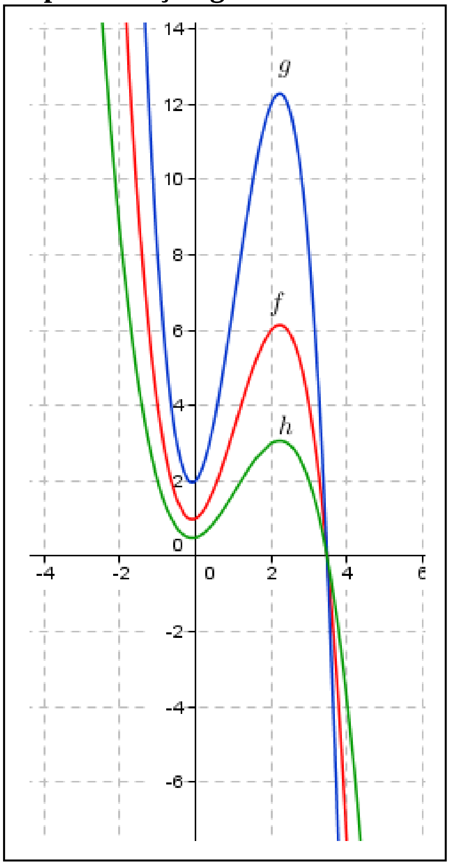
Etapa III: Socialização e validação das respostas

O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa IV: Institucionalização.

O professor apresenta as respostas esperadas:

Figura 40 – Representação geométrica das funções *g* e *h*.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA VI: HOMOTETIAS HORIZONTAIS DE FUNÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre os gráficos de duas funções, f e g quando $g(x) = f(ax)$ e a é um número real positivo.

PÚBLICO-ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio

ATIVIDADE 1: Dilatação ou compressão horizontal do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

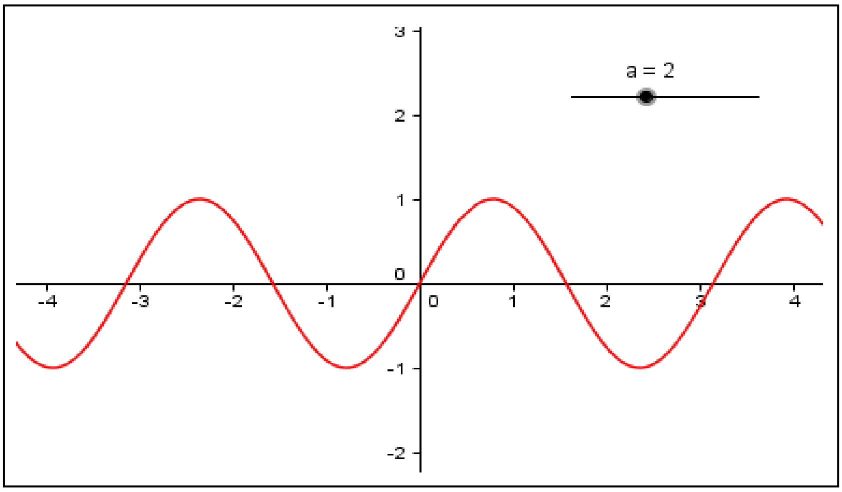
Peça para que os trios de estudantes considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(ax)$ quando a é um parâmetro e $x \in [0,2\pi]$.

Etapa II: Construção.

Construção a partir do “controle deslizante”.

a) Defina o intervalo para o controle deslizante. Neste caso vamos tomar o intervalo $(0,3)$;
b) No campo de entrada do GeoGebra, escrever a função $g(x) = sen(ax)$;
c) Fazer o parâmetro $\boldsymbol{a}$ variar no intervalo já definido no item a).

Figura 41 – Gráfico da função g.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa III: Problematização

O professor propõe aos estudantes que investiguem o que acontece com o gráfico de g nas seguintes situações:

ii) quando a varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1;

iii) quando a varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1.

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

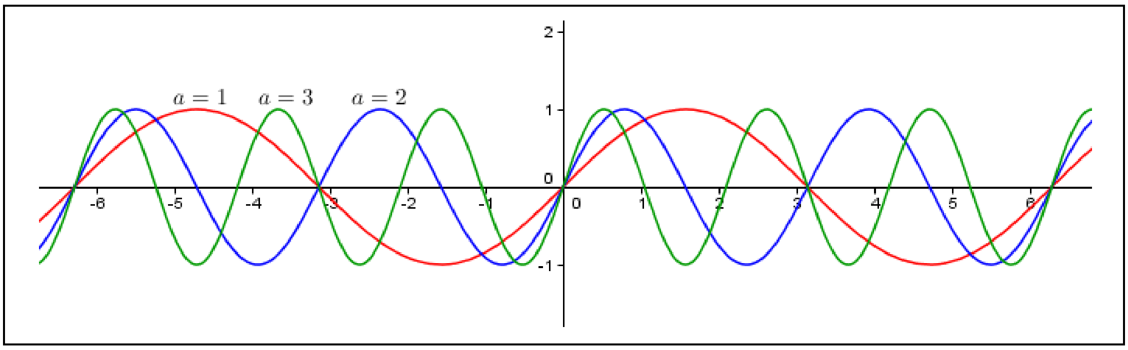
Etapa V: Institucionalização.

O professor apresenta as respostas esperadas:

iii) Quando a varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1 o gráfico da função g se comprime horizontalmente ;

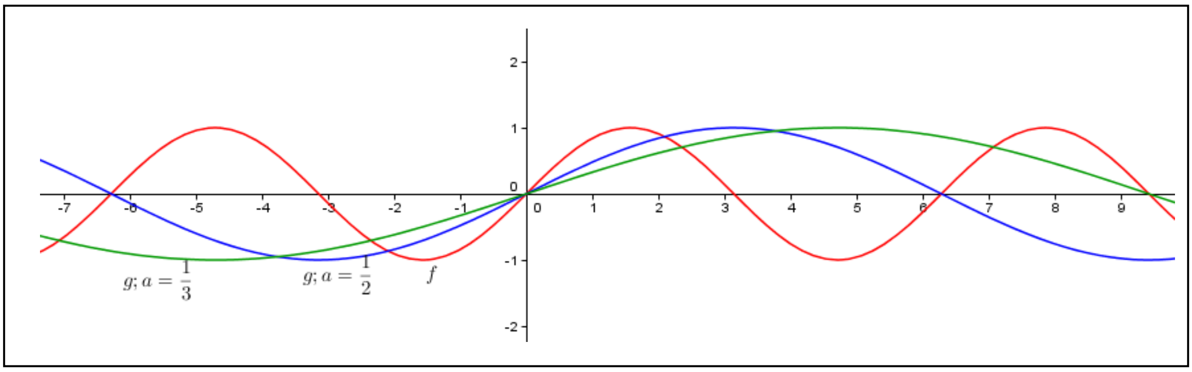
iv) Quando a varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1 o gráfico da função g se dilata horizontalmente. Se fizermos o $a = 0$ o gráfico da função g fica exatamente sobre o eixo x.

Figura 42 – O gráfico da função g quando tomamos valores pra $a \geq 1$.



Fonte: Santos, 2013.

Figura 43 – Dilatação horizontal do gráfico de g $para$ $0 < a < 1$.



Fonte: Santos, 2013.

ATIVIDADE 2: Dilatação ou compressão horizontal do gráfico da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

Peça para que os trios de estudantes considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = (ax)^2$ onde a é um parâmetro e $x \epsilon \mathbb{R}$.

Etapa II: Construção a partir do "controle deslizante".

i) Defina o intervalo para o controle deslizante. Neste caso vamos tomar o intervalo (0,5);
ii) No campo de entrada do GeoGebra, escrever a função $g(x) = (ax)^2$;
iii) Fazer o parâmetro a variar no intervalo já definido no item a).

Etapa III: Problematização

Peça para que os estudantes investiguem a relação entre o gráfico de f e g, nas seguintes situações:

i) para $a \geq 1$ (Sugira aos estudantes, caso necessário, que eles façam o parâmetro a variar no intervalo [1, 3]);
ii) para $0 < a < 1$. (Sugira aos estudantes, caso necessário, o parâmetro a variar no intervalo [0, 1]).

Etapa IV: Socialização e validação das respostas

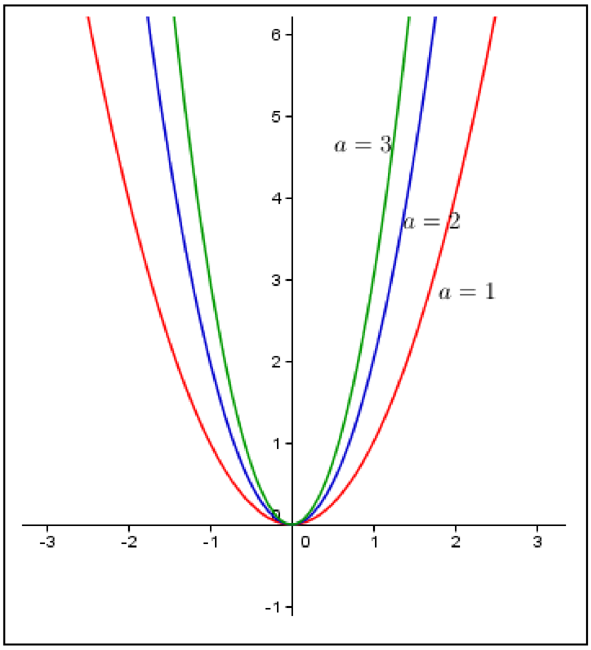
O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa V: Institucionalização.

O professor apresenta as respostas esperadas:

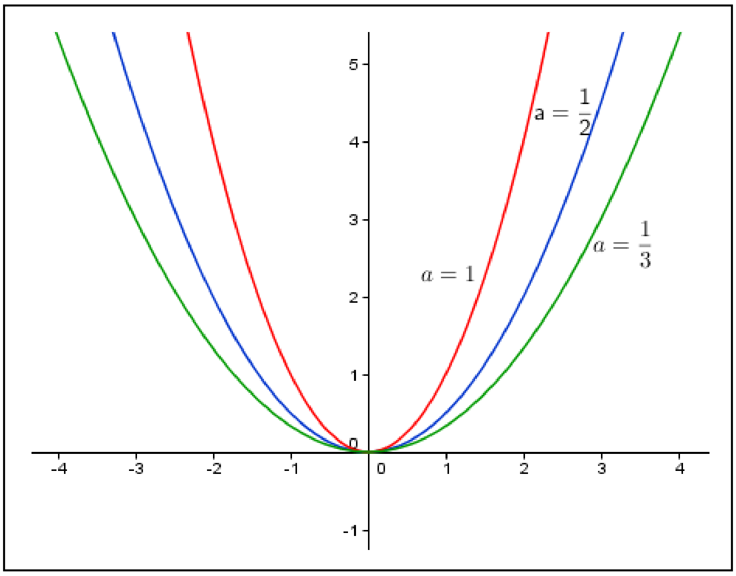
- Quando a varia no intervalo [1, 3], isto é, por valores maiores do que 1 o gráfico da função g se comprime horizontalmente;
- Quando a varia num intervalo [0, 1], isto é, por valores positivos menores do que 1 o gráfico da função g se dilata horizontalmente. Se fizermos o $a = 0$ o gráfico da função g fica exatamente sobre o eixo x.

Figura 44 – O gráfico de g quando $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.



Fonte: Santos, 2013.

Figura 45 – O gráfico de g quando $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{3}$.



Fonte: Santos, 2013.

ATIVIDADE 3: Dilatação ou compressão horizontal do gráfico da função $f: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos

Etapa I: Problematização

Peça aos trios de estudantes que considerem duas funções $f, g: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = |ax|$ onde $a \in \mathbb{R}$. Em seguida, o professor pergunta a cada trio como pode ser obtido o gráfico de g a partir do gráfico de f, nas seguintes situações:

i) Para $a \geq 1$.
ii) Para $0 < a < 1$.

Etapa II: Socialização e validação das respostas

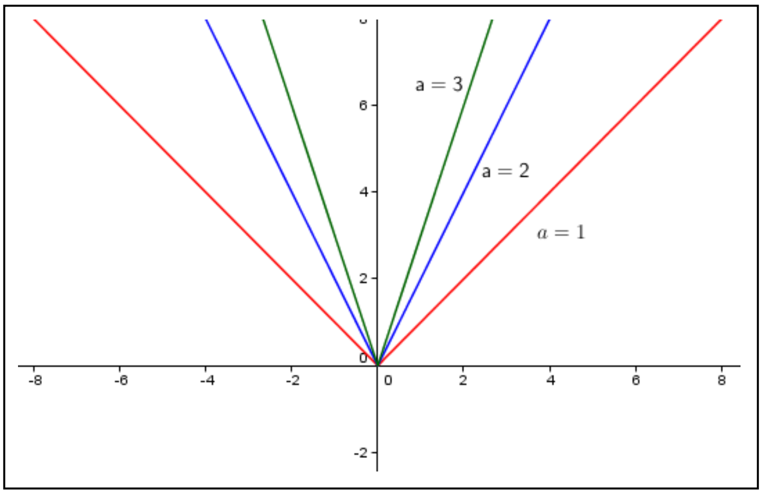
O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa III: Institucionalização.

Respostas esperadas:

i) Espera-se que os estudantes concluam, fazendo o parâmetro a variar por valores maiores do que ou iguais a 1, que o gráfico de g se comprime horizontalmente. Ou ainda que as retas vão se fechar, de tal modo que estaria a coincidir com o eixo das ordenadas.

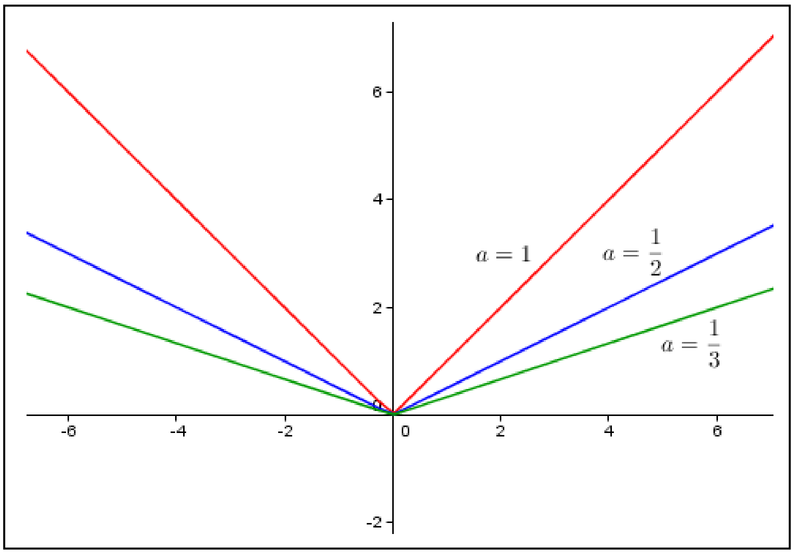
Figura 46 - O gráfico de g quando $a = 1$, $a = 2$ e $a = 3$.



Fonte: Santos, 2013.

ii) Espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de g é a dilatação horizontal do gráfico de f, ou seja, que as semirretas do gráfico de f se abrem quando o parâmetro a varia no intervalo [0, 1]. Também, que as retas vão se fechar, de tal modo que estaria a coincidir com o eixo das abscissas.

Figura 47 – O gráfico de g quando $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{3}$.



Fonte: Santos, 2013.

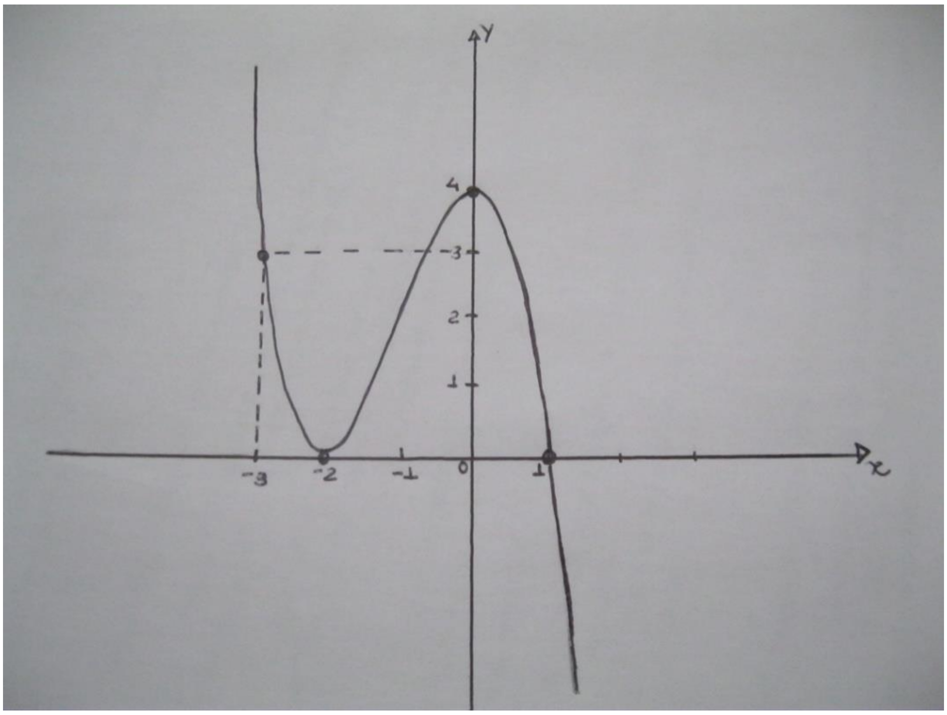
ATIVIDADE 4: Dilatação ou compressão horizontal do gráfico de uma função da qual se conhece apenas o gráfico.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor entrega aos participantes da oficina o gráfico de uma função f abstrata (isto é, da qual não se conhece a lei de correspondência f) desenhado em um papel quadriculado, conforme a figura seguinte.

Figura 48 – Representação geométrica da função f.



Fonte: Santos, 2013.

O professor pede aos estudantes que esbocem com lápis e papel os gráficos das funções $g(x) = f(2x)$ e $h(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ para $x \in \mathbb{R}$.

Etapa II: Socialização e validação das respostas

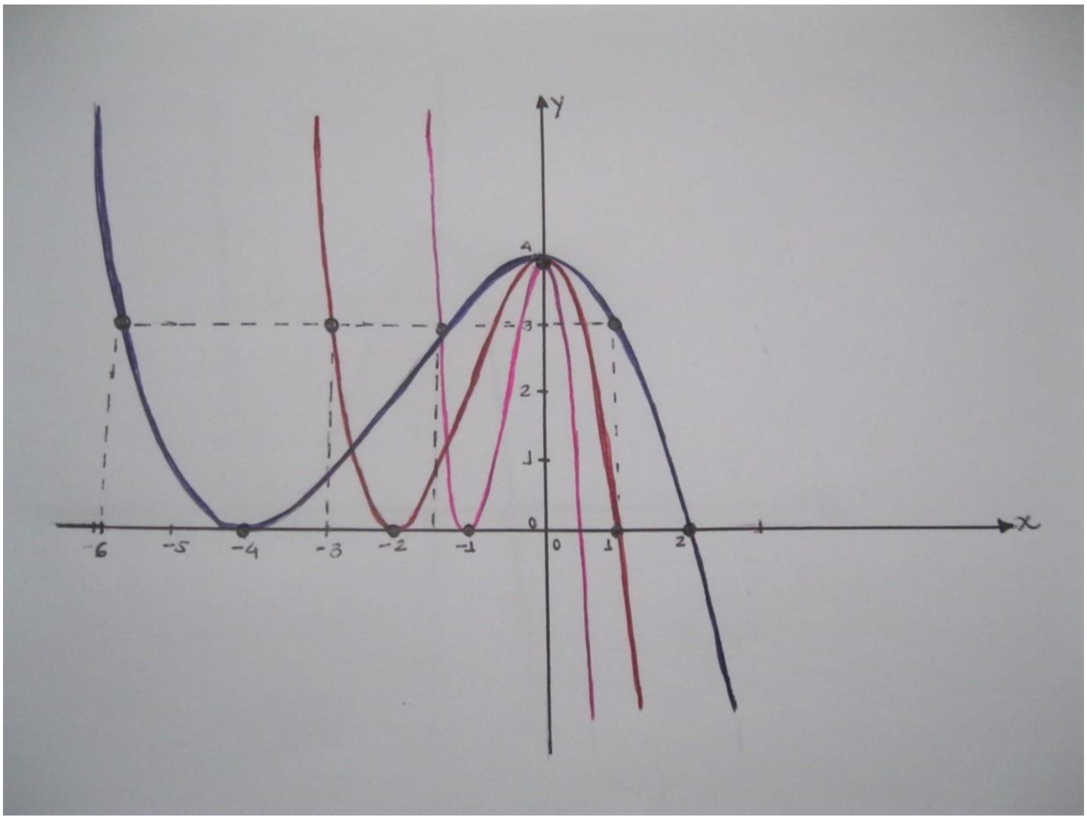
O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa III: Institucionalização

O professor apresenta um esboço do gráfico para os participantes da oficina, justificando a sua construção, conforme a figura seguinte.

O gráfico de cor vermelha corresponde a função f, por outro lado o gráfico de cor azul corresponde a função g e o gráfico de cor rosa corresponde a função h.

Figura 49 – Representação geométrica de f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA VII: SÍNTESE DO ESBOÇO DE GRÁFICOS QUE DIFEREM POR HOMOTETIAS

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

ATIVIDADE 1: Com base nos resultados vistos até aqui o que difere a Dilatação vertical da Dilatação horizontal?

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Problematização

O professor propõe a seguinte questão: quais as relações entre os gráficos de f e de g nas situações seguintes:

i. Quando $g(x) = a\, f(x)$, onde $a \in \mathbb{R}_+$,
ii. Quando $g(x) = f(a\, x)$, onde $a \in \mathbb{R}_+$.

Observação: O professor observa o comportamento de cada trio de estudantes com relação à questão proposta, respondendo questionamentos que porventura apareçam. Pode fazer sugestões, tais como: verifiquem o que acontece nos casos particulares em $f(x) = x^2$ ou $f(x) = sen\ x$. (Neste momento, o professor pode permitir a utilização do GeoGebra ou do lápis e papel).

Etapa II: Socialização e validação das respostas.

O professor pede aos estudantes que apresentem as respostas a que chegaram. Em caso de divergências o professor pede para que os trios apresentem seus argumentos e faz a mediação até que os trios cheguem a um consenso.

Etapa III: Institucionalização

O professor vai até a lousa e mostra geometricamente o que acontece no item (i): se multiplicarmos a função por $a \in \mathbb{R}_+$ isso resulta em uma dilatação vertical, pois estamos multiplicando casa ordenada de cada um dos pontos pertencentes ao gráfico por a.

Assim se tomarmos o $a > 1$ teremos um esticamento (dilatação) vertical; Se o $0 < a < 1$ teremos um encolhimento (contração) vertical.

Em seguida considera o que acontece no item (ii): quando temos $g(x) = f(a\,x)$, com $a \in \mathbb{R}_+$, o que estamos fazendo é multiplicando a variável dependente por a. Isso resulta em uma nova função, onde cada elemento do domínio dessa nova função deverá ter a mesma imagem que um elemento do domínio da função "original" se for divido por a. A consequência disso é uma dilatação horizontal do gráfico.

Assim se tomarmos o $a > 1$ teremos um encolhimento horizontal; Se o $0 < a < 1$ teremos um esticamento horizontal.

OFICINA VIII: REFLEXÕES VERTICAIS DE FUNÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre os gráficos das funções f e g quando $g(x) = -f(x)$

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

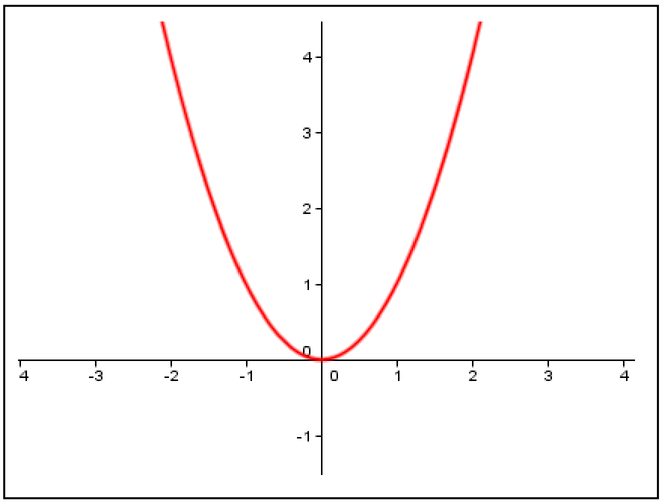
ATIVIDADE 1: Reflexão vertical do gráfico da função $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção

O professor pede para que os trios de estudantes esboce com o auxílio do GeoGebra o gráfico da função $f(x) = x^2$ com $x \in \mathbb{R}$.

Figura 50 – Gráfico da função $\boldsymbol{f}$



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Problematização.

O professor pede para que os trios de estudantes esbocem com o GeoGebra, em uma mesma tela, os gráficos das funções $f, g: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x^2$ para $x \in \mathbb{R}$, pintando-os com cores diferentes.

Etapa III: Construção

Nesta fase o professor sugere aos trios de estudantes que usem a função controle deslizante no GeoGebra para ver o comportamento das funções $g(x) = ax^2$. Ressalta que agora é necessário que eles façam o parâmetro a variar em um intervalo do tipo [-1, 1], no qual o parâmetro a percorra valores positivos e negativos.

Etapa IV: Problematização

Pergunta-se aos trios de estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa V: Socialização e validação das respostas

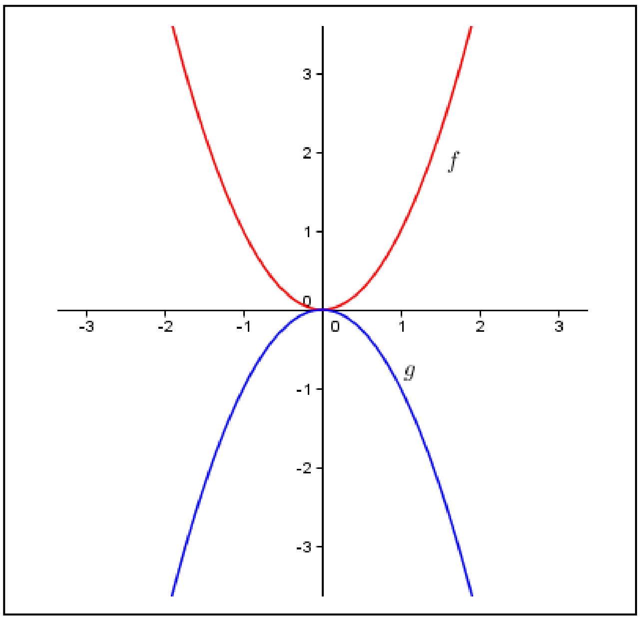
Aqui serão discutidas as respostas de cada trio, fazendo a correção quando necessário, objetivando clareza no entendimento das soluções.

Etapa VI: Institucionalização

Respostas esperadas:

a) O gráfico de g é o gráfico de f refletido verticalmente em torno do eixo x.
b) Os gráficos de f e g são simétricos em relação ao eixo x.

Figura 51 – Representação geométrica da função f e g.



Fonte: Santos, 2013.

ATIVIDADE 2: Reflexão vertical do gráfico da função f: ℝ: → ℝ dada por $f(x) = |x|$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor pede para que os estudantes esbocem com o GeoGebra as funções f, g: ℝ: → ℝ definidas por $f(x) = |x|$ e $g(x) = -|x|$ para $x \in [-3,3]$. Em seguida, pinte os gráficos com cores distintas.

Etapa II: Problematização.

Pergunta-se aos estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa III: Socialização e validação das respostas

O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

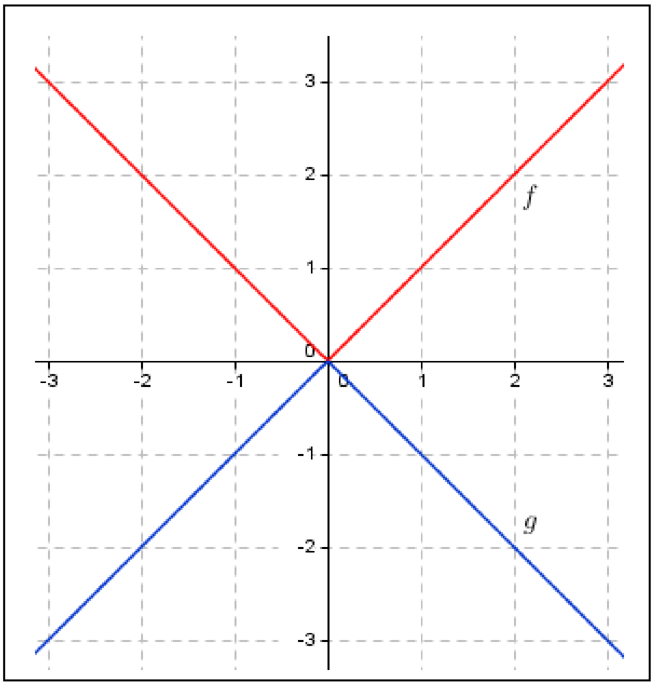
Etapa IV: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

a) O gráfico de g é a reflexão do gráfico de f em relação ao eixo x. Para ver isso, o professor pode recomendar que os estudantes considerem a função $h(x) = a|x|$ e façam o controle deslizante ***a*** variar no intervalo [-1, 1].

b) Os gráficos de f e g são simétricos em relação ao eixo x.

Figura 52 – Reflexão horizontal no gráfico de f.



Fonte: Santos, 2013.

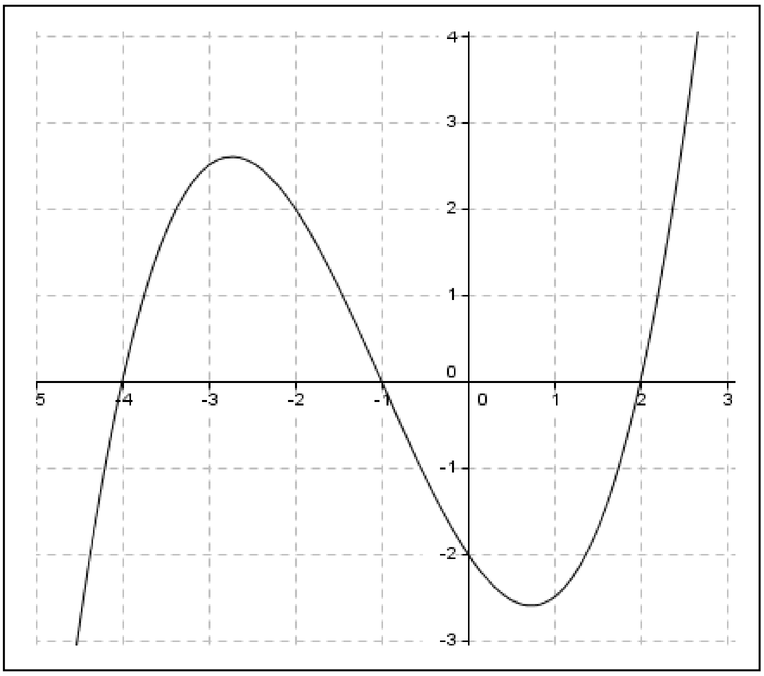
ATIVIDADE 3: Qual relação entre os gráficos de f e g, quando $g(x) = -f(x)$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor esboça o gráfico de uma função f abstrata conforme a figura seguinte.

Figura 53 – Gráfico da função f.



Fonte: Santos, 2013.

Esta atividade deverá ser realizada sem o recurso do Software GeoGebra, ou seja, a solução deve ser encontrada utilizando apenas papel e lápis. Em seguida fazer a construção no GeoGebra.

Etapa II: Problematização

Peça para que os estudantes esbocem com lápis e papel os gráficos das funções $g(x) = -f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$. O coordenador da oficina pergunta aos trios de estudantes que relação existe entre os gráficos de f e g. Neste momento, o coordenador da oficina circula no laboratório de informática, observando a reação e as possíveis dificuldades que cada trio de estudantes apresenta, dialogando com os estudantes e respondendo a possíveis questionamentos.

Etapa III: Socialização e validação das respostas.

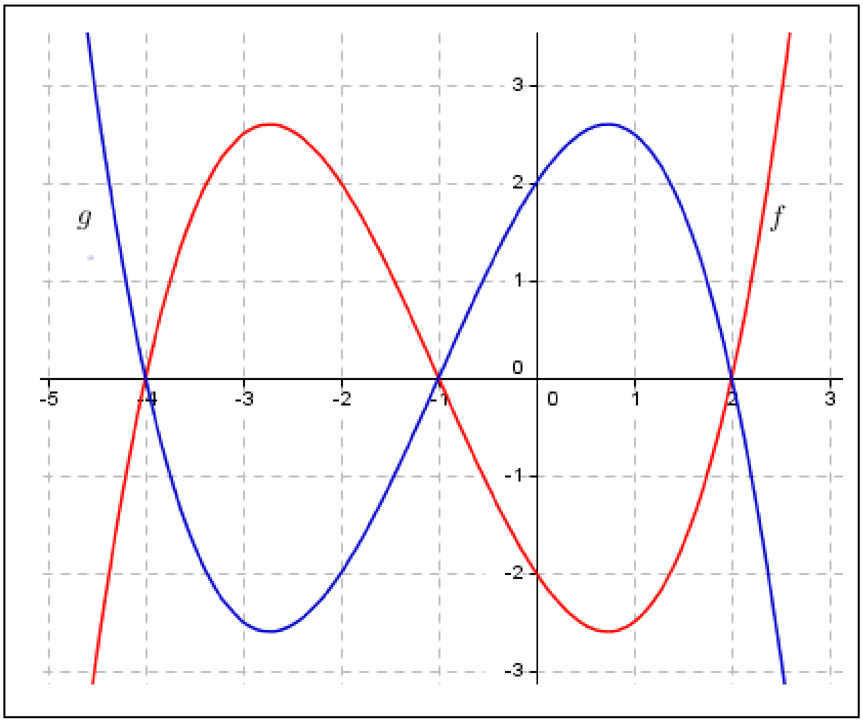
O coordenador pede aos trios que apresentem suas respostas, confrontando-as, e em caso de divergências pede a eles que apresentem aos participantes da oficina as suas justificativas. Atuando como mediador, o coordenador tenta estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa IV: Institucionalização.

Nesta etapa o coordenador da oficina escreve e desenha numa lousa as conclusões, ou seja, as respostas esperadas:

a) Que o gráfico de g encontra-se esboçado como segue na Figura 49.

Figura 54 – Reflexão do gráfico de f.



Fonte: Santos, 2013.

OFICINA IX: COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES VERTICAIS E DILATAÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre as funções f, g e h quando $g(x) = cf(x) + a$ e $h(x) = cf(x) + b$.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

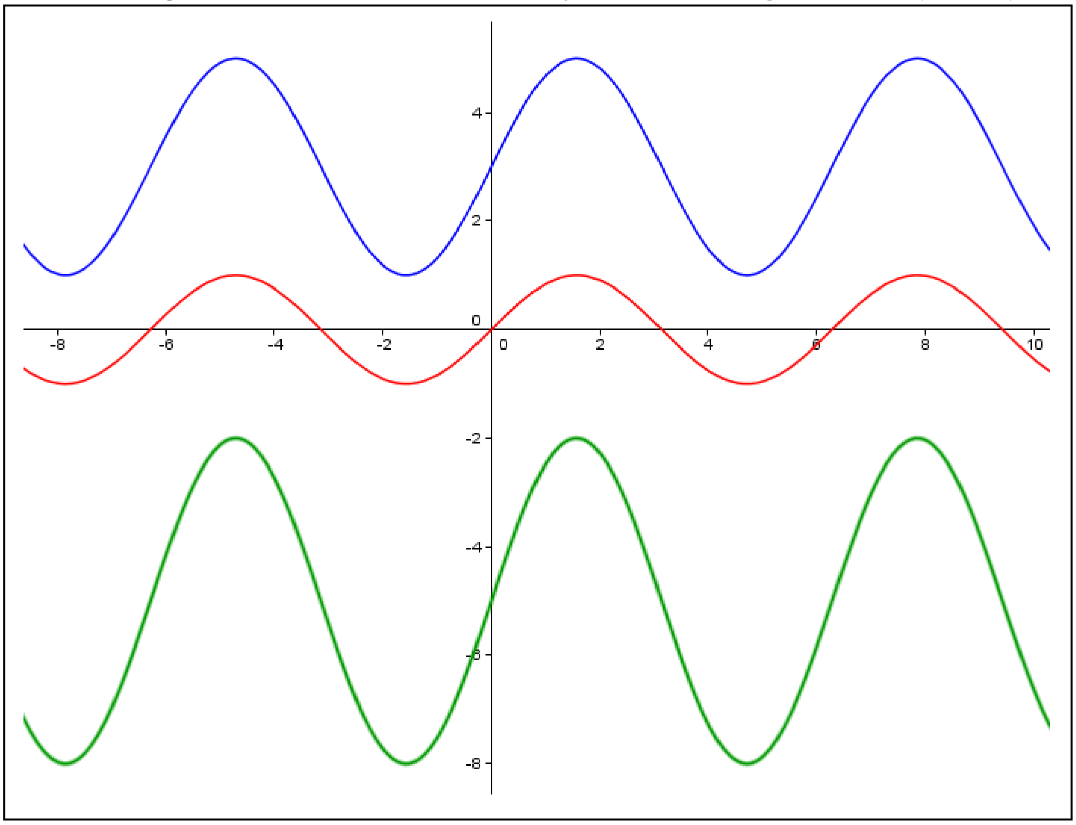
ATIVIDADE 1: Composição de translação vertical e dilatação da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

O professor solicita que os alunos esbocem com o auxílio do GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}:\rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2\ sen(x) + 3$ e $h(x) = 3\ sen(x) - 5$ e $x \in [0,2\pi]$.

Figura 55 – Gráfico das funções: $f\ (vermelho), g(azul) e\ h(verde)$.



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Construção e problematização

O professor sugere que os estudantes considerem o gráfico de uma função auxiliar $G(x) = asen(x) + b$, na qual a e b são controles deslizantes e com os intervalos de variação [1, 3] e [-5, 3]. Pergunta-se: como podemos obter o gráfico de g e de h a partir do gráfico de f.

Etapa III: Socialização e validação das respostas

O professor pede que os trios apresentem as suas conclusões e em caso de divergências o professor procede uma mediação a fim de estabelecer um consenso.

Caso seja necessário, serão orientados os seguintes passos aos estudantes:

- Determinar os controles deslizantes “a” e “b”;
- Determinar o intervalo de cada um deles;
- Escrever na caixa de entrada a função $f(x) = a\ sen\ x + \text{b}$;
- Configurar com animação para entender os efeitos: fazer $a = 1$ e fazer b variar;
- fazer $b = 0$ e a variar de 1 a 2;
- fazer $a = 2$ e b variar de 0 a 3;
- fazer $a = 3$ e b variar de 0 a -5.

Etapa IV: Institucionalização.

O professor então sintetiza a conclusão de que:

a) o gráfico de $g(x) = 2\ sen(x) + 3$ pela composição de uma dilatação e uma translação vertical;

b) o gráfico de $h(x) = 3\ sen(x) - 5$ pode ser obtido pela composição de duas transformações, uma dilatação e uma translação vertical.

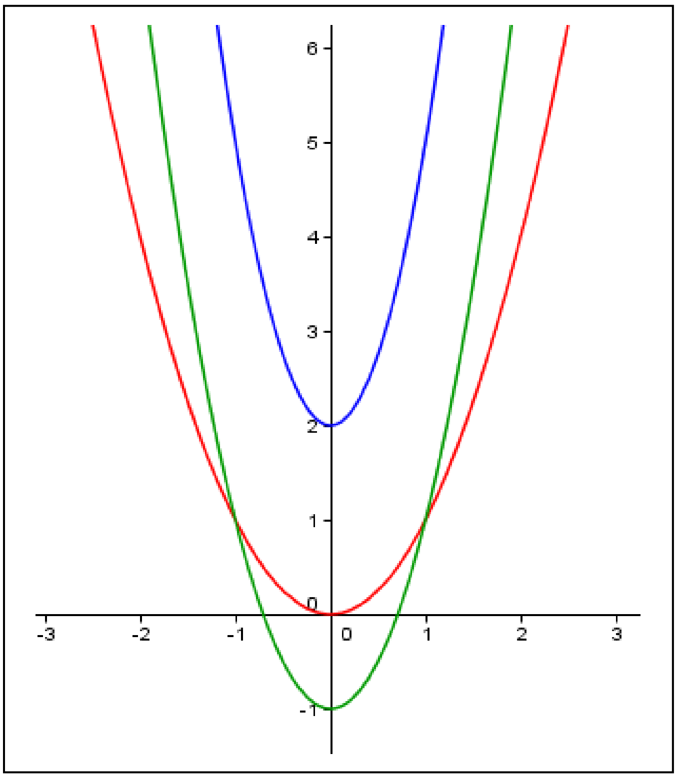
ATIVIDADE 2: Composição de translação vertical e dilatação da função $\boldsymbol{f}$: ℝ:→ ℝ definida por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção e problematização.

O professor propõe aos estudantes que esbocem com auxílio do GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções f, g, h: ℝ:→ ℝ definidas por $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x^2 + 2$ e $h(x) = 2x^2 - 1$, $x \in [-3,3]$. Pergunta-se: como podemos obter o gráfico de g e de h a partir do gráfico de f.

Figura 56 – O gráfico da função $f(vermelho), g(azul) e\ h(verde)$



Fonte: Santos, 2013.

Etapa II: Socialização e validação das respostas.

O professor pede que os trios apresentem as suas conclusões e em caso de divergências o professor procede uma mediação a fim de estabelecer um consenso.

Caso seja necessário, serão orientados os seguintes passos aos estudantes:

- Determinar os controles deslizantes “a” e “b”;
- Determinar o intervalo de cada um deles;
- Escrever na caixa de entrada a função $f(x) = a\,x^2 + \mathrm{b}$;
- Configurar com animação para entender os efeitos: fazer $a = 1$ e fazer b variar;
- fazer $b = 0$ e a variar de 1 a 3;
- fazer $a = 3$ e b variar de 0 a 2;
- fazer $a = 2$ e b variar de 0 a -1.

Etapa III: Institucionalização

O professor então sintetiza a conclusão de que:

a) o gráfico de $g(x) = 3\,x^2 + 2$ pela composição de uma dilatação e uma translação vertical;

b) o gráfico de $h(x) = 2x^2 - 1$ pode ser obtido pela composição de duas transformações, uma dilatação e uma translação vertical.

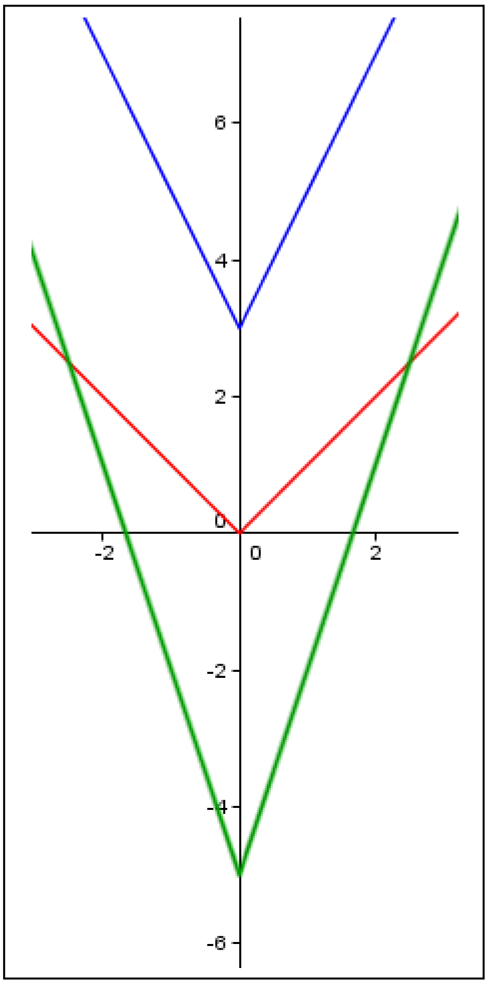
ATIVIDADE 3: Composição de translação vertical e dilatação da função $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}:\to \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção e problematização.

O professor solicita aos alunos que esbocem ainda com o auxílio do Geogebra, em uma mesma tela os gráficos das funções f, g, h: $\mathbb{R}:\to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = 2|x| + 3$ e $h(x) = 3|x| - 5, x \in [-3,3]$ Pergunta-se: como podemos obter o gráfico de g e de h a partir do gráfico de f.

Figura 57 – Representação geométrica de $f(vermelho), g(azul) e\ h(verde)$.



Fonte: Santos, 2013.

O professor sugere que os estudantes considerem o gráfico de uma função auxiliar $G(x) = a|x| + b$, na qual a e b são controles deslizantes e com os intervalos de variação [$\frac{1}{2}$, 1] e [-5, 3], respectivamente.

Etapa II: Socialização e validação dos conhecimentos

O professor pede que os trios apresentem as suas conclusões e em caso de divergências o professor procede uma mediação a fim de estabelecer um consenso.

Etapa III: Institucionalização.

O professor então sintetiza a conclusão de que os gráficos de $g(x) = \frac{1}{2}|x| + 3$ e $h(x) = 3|x| - 5$ podem ser obtidas do gráfico de f pela composição de uma dilatação e de uma translação vertical

OFICINA X: COMPOSIÇÃO DE TRANSLAÇÕES HORIZONTAIS E DILATAÇÕES.

OBJETIVO: Perceber a relação entre as funções f, g e h quando $g(x) = cf(x + a)$ e $h(x) = cf(x + b)$.

PÚBLICO ALVO: Estudantes do 2º ano do Ensino Médio.

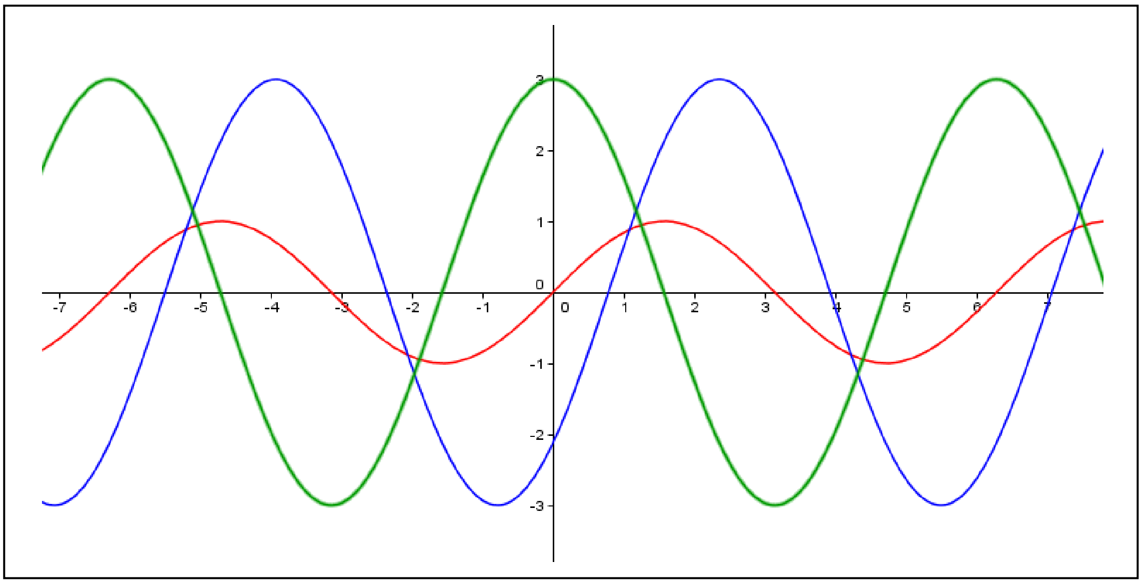
ATIVIDADE 1: Composição de translação horizontal e dilatação da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$.

TEMPO ESTIMADO: 2 aulas de 50 minutos.

Etapa I: Construção e problematização.

O professor solicita que os alunos esbocem com o GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}: \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 3\ sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = 3\ sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $x \in [-4\pi, 4\pi]$. Pergunta-se: como podemos obter o gráfico de g e de h a partir do gráfico de f.

Figura 58 – O gráfico da função $\boldsymbol{f(vermelho), g(azul)}$ e $\boldsymbol{h(verde)}$.



Fonte: Santos, 2013.

O professor sugere que os estudantes considerem o gráfico de uma função auxiliar $G(x) = asen(x + b)$, na qual a e b são controles deslizantes e com os intervalos de variação $[0, 3]$ e [-$\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$], respectivamente.

Etapa II: Socialização e validação dos conhecimentos

O professor pede que os trios apresentem as suas conclusões e em caso de divergências o professor procede uma mediação a fim de estabelecer um consenso.

Etapa III: Institucionalização

O professor então sintetiza a conclusão de que os gráficos de $g(x) = 3\ sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = 3\ sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ podem ser obtidas do gráfico de f pela composição de uma dilatação e de uma translação horizontal para a direita e para a esquerda, respectivamente.

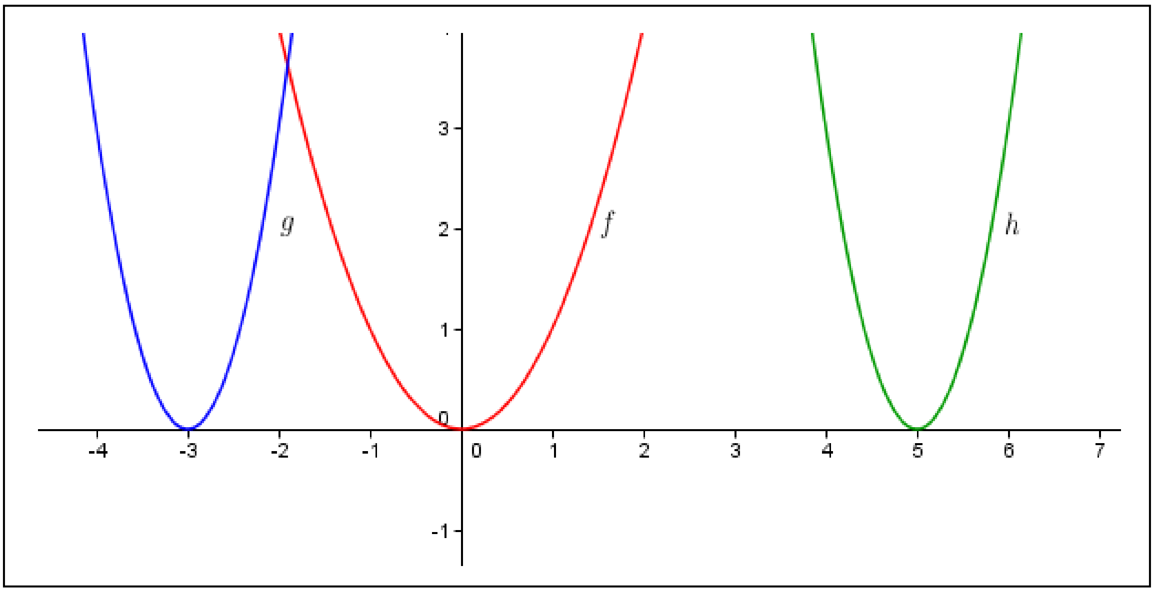
ATIVIDADE 2: Composição de translação horizontal e dilatação da função $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}$: → $\mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = x^2}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção e problematização.

O professor solicita aos alunos que esbocem, ainda com o GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções f, g, h: $\mathbb{R}$: → $\mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x^2$, $g(x) = 3(x + 3)^2$ e $h(x) = 3(x - 5)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Pergunta-se: como podemos obter os gráficos de g e de h a partir de f ?

Figura 59 – Gráfico das funções f, g e h.



Fonte: Santos, 2013.

O professor sugere que os estudantes considerem gráficos de uma função auxiliar $G(x) = a(x+b)^2$, na qual a e b são controles deslizantes com variação adequada. Faça b = 0 e varie o parâmetro a num intervalo do tipo [-1, 3]. Em seguida, faça $a = 1$ e varie b em um intervalo do tipo [-3, 5].

Etapa II: Socialização e validação dos conhecimentos

O professor pede que os trios apresentem as suas conclusões e em caso de divergências o professor procede uma mediação a fim de estabelecer um consenso.

Etapa III: Institucionalização

O professor então sintetiza a conclusão de que os gráficos de $g(x) = 3\ sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ e $h(x) = 3\ sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ podem ser obtidas do gráfico de f pela composição de uma dilatação e de uma translação horizontal para a direita e para a esquerda, respectivamente.

ATIVIDADE 3: Composição de translação horizontal e dilatação da função $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\boldsymbol{f(x) = |x|}$.

TEMPO ESTIMADO: 1 aula de 50 minutos.

Etapa I: Construção.

Em seguida o professor solicita que os alunos esbocem com o GeoGebra, em uma mesma tela os gráficos das funções $f, g, h: \mathbb{R}: \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = |x|$, $g(x) = a|x + 3|$ e $h(x) = a|x - 5|$, quando a é um parâmetro e $x \in \mathbb{R}$.

Etapa II: Problematização

Pinte o gráfico das funções descritas acima com cores diferentes e verifique o que acontece quando varia o valor de "a", nos casos:

i) Para $a > 1$. (Sugira que façam o parâmetro a variar no intervalo [1, 3]).
ii) Para $0 < a < 1$. (Sugira que façam o parâmetro variar no intervalo [0, 1]).

Etapa III: Construção

Pedir para que os estudantes realizem esse teste (etapa II) utilizando a ferramenta *controle deslizante*. Explicar que, ao determinar um intervalo de variação para o parâmetro "a" se torna imediato notar o comportamento da função.

Etapa IV: Problematização

Peça para que os estudantes investiguem a relação entre os gráficos de f e g e f e h.

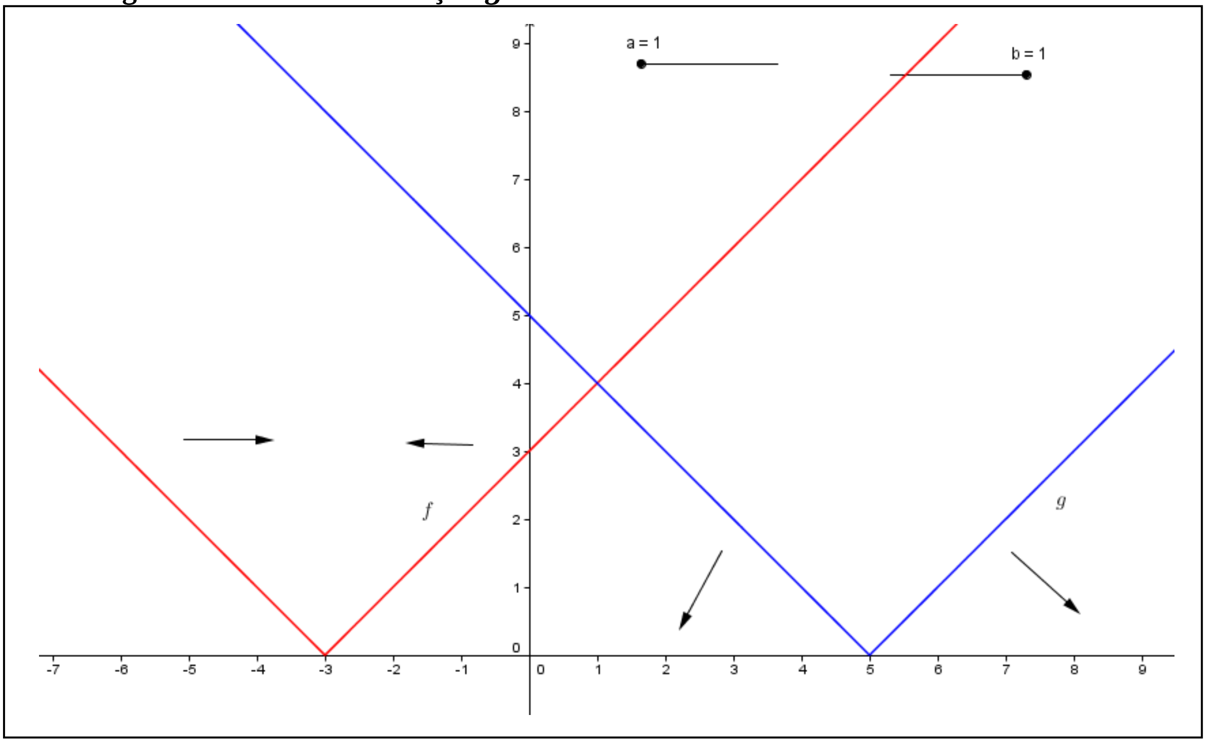
Etapa V: Socialização e validação dos conhecimentos.

Aqui serão discutidas as respostas de cada trio, mediando às divergências visando a estabelecer um consenso entre os participantes da oficina.

Etapa VI: Institucionalização.

O professor então sintetiza a conclusão de que os gráficos de $g(x) = a|x+3|$ e $h(x) = a|x-5|$ podem ser obtidas do gráfico de f pela composição de uma dilatação e de uma translação horizontal para a esquerda e para direita, respectivamente.

Figura 60 – Gráfico da função g e h usando a ferramenta “controle deslizante”



Fonte: Santos, 2013.

REFERÊNCIAS

FREITAS, José Luiz Magalhães. **Teoria das Situações Didáticas.** In: Machado, Silva Dias Alcântara. (Org). **Educação Matemática** – Uma (nova) Introdução. 3.ed. Revisada. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-111.

GIRALDO, Victor. **Funções Reais e Gráficos**. Textos da Disciplina Números e Funções Reais. Rio de Janeiro: PROFMAT/SBM. 2012.

NÓBRIGA, Jorge Cássio Costa.; ARAÚJO, Luis Cláudio Lopes. **Aprendendo Matemática com o GeoGebra**. São Paulo: Ed. Exato, 2010.

SANTOS, Anayara Gomes. **O GeoGebra como recurso didático para a aprendizagem do esboço de gráficos de funções que diferem de outras por uma composição de isometrias ou homotetias**. 2013. 106f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação Ensino de Ciências e Matemática, PPGECIM, Maceió, 2013.

SANTOS, Vívia Dayana Gomes. **Esboços de Gráficos nos Ambientes "Papel e Lápis" e "GeoGebra":** funções afins e funções quadráticas. 2012. 124f. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós Graduação Ensino de Ciências e Matemática, PPGECIM, Maceió, 2012.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO. **Introdução as Funções Reais. Projeto Novas Tecnologias no Ensino**. Disponível em <http://www.im.ufrj.br/dmm/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/conteudop.htm>
Acesso em 23 nov. 2012.